

(Thời gian làm bài 150 phút – Không kể thời gian giao đề.)

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH: (7 điểm)

Câu I (3,0 điểm) Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Tìm a để đường thẳng (d): $y = ax + 2$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt.

Câu II (3,0 điểm)

1. Giải phương trình: $\log_2^2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x - 3 = 0$

2. Tính tích phân: $I = \int_1^e \frac{\sqrt{8 \ln x + 1}}{x} dx$

3. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số:

$$y = f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - \frac{3}{2} \text{ trên đoạn } [0;2]$$

Câu III (1 điểm). Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật tâm O, $AB = a\sqrt{3}$, $AD = a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Góc giữa SC và đáy bằng 60° .

1. Chứng minh: $CD \perp SD$.
2. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

II. PHẦN RIÊNG: (3 điểm)

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần A hoặc B

A. Theo chương trình chuẩn

Câu IVa. (2,0 điểm)

Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(1;2;-1)$, mặt phẳng (P): $x + 2y - z - 4 = 0$ và

đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + t \end{cases}$

1. Viết phương trình của mặt cầu (S) có tâm A và tiếp xúc với mp(P).
2. Viết phương trình của mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với đường thẳng Δ .

Câu IVb. (1 điểm) Giải phương trình sau trên tập số phức: $-2z^2 + 3z - 4 = 0$

B. Theo chương trình nâng cao:

Câu IVa. (2 điểm)

Trong không gian Oxyz, cho điểm $M(2; 1; 0)$, mặt phẳng (P): $2x - 3y + z + 1 = 0$

và đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}$

1. Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P).
2. Viết phương trình của đường thẳng d' qua M, vuông góc và cắt d.

Câu IV b. (1 điểm) Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tính $|z^3 - \bar{z}|$.

---- (Hết) ----

Câu I

1. (2,0 điểm)

+ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ **(0,25 điểm)**

+ $y' = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in D$ **(0,25 điểm)**

+ $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng. **(0,25 điểm)**

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang. **(0,25 điểm)**

+ Bảng biến thiên. **(0, 25 điểm)**

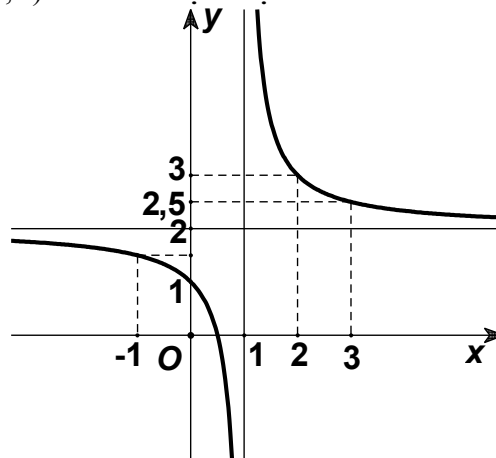
x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	-		-
y	2 \searrow $-\infty$		$+\infty$ \searrow 2

+ HS nghịch biến trên hai khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. HS không có cực trị **(0,25 điểm)**

+ Điểm đặc biệt: Giao với $Ox: (-\frac{1}{2}; 0)$, Giao với $Oy: (0;1)$ **(0,25 điểm)**

+ Đồ thị nhận giao điểm $I(1;2)$ của hai tiệm cận làm tâm đối xứng.

+ Đồ thị (C): **(0,25 điểm)**



2. (1,0 điểm).

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$$\frac{2x-1}{x-1} = ax+2 \Leftrightarrow ax^2 - ax - 1 = 0 \quad (1) \quad (\text{với } x \neq 1) \quad \mathbf{(0,25 \text{ điểm})}$$

YCBT \Leftrightarrow PT (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1 **(0,25 điểm)**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = a^2 + 4a > 0 \\ a(1)^2 - a \cdot 1 - 1 \neq 0 \end{cases} \quad \mathbf{(0,25 \text{ điểm})} \quad \Leftrightarrow a \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty) \quad \mathbf{(0,25 \text{ điểm})}$$

Câu II (3,0 điểm)

1. **(1,0 điểm)** $\log_2^2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x - 3 = 0$

+ ĐK: $x > 0$ (0,25 điểm)

+ Khi đó: $\log_2^2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x - 3 = 0 \Leftrightarrow 4\log_2^2 x - \log_2 x - 3 = 0$ (0,25 điểm)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = -\frac{3}{4} \end{cases} \quad (0,25 \text{ điểm}) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2^{-\frac{3}{4}} \end{cases}$$

Vậy PT đã cho có hai nghiệm: $x = 2$ và $x = 2^{-\frac{3}{4}}$ (0,25 điểm)

2. (1,0 điểm) Tính tích phân:

Đặt $t = \sqrt{8\ln x + 1} \Rightarrow tdt = \frac{4}{x}.dx$. Với $x = 1 \Rightarrow t = 1$; $x = e \Rightarrow t = 3$ (0,25 điểm)

$$\text{Vậy } I = \frac{1}{4} \int_1^3 t^2 dt \quad (0,25 \text{ điểm}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_1^3 \quad (0,25 \text{ điểm}) = \frac{13}{6} \quad (0,25 \text{ điểm})$$

3. (1,0 điểm)

+ Trên đoạn $[0;2]$ ta có: $y' = f'(x) = 2x^3 - 2x$ (0,25 điểm)

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \quad (0,25 \text{ điểm})$$

+ Ta có: $f(1) = -2$, $f(0) = -\frac{3}{2}$, $f(2) = \frac{5}{2}$ (0,25 điểm)

Vậy $\max_{[-1;2]} f(x) = f(2) = \frac{5}{2}$, $\min_{[-1;2]} f(x) = f(1) = -2$ (0,25 điểm)

Câu III (1,0 điểm).

1. (0,5 điểm) Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \text{ (gt)} \\ CD \perp SA \text{ (SA} \perp (ABCD)) \end{cases} \quad (0,25 \text{ điểm}) \Rightarrow CD \perp SD \quad (0,25 \text{ điểm})$

2. (0,5 điểm)

- Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow AC$ là hình chiếu của SC lên (ABCD)

$$\Rightarrow (\widehat{SC, (ABCD)}) = (\widehat{SC, AC}) = \widehat{SCA} = 60^\circ \quad (0,25 \text{ điểm})$$

Tính được: $AC = 2a$, $SA = 2a\sqrt{3}$

- Thể tích của khối chóp S.ABCD là: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = 2a^3$ (đvtt) (0,25 điểm)

A. Theo chương trình chuẩn

Câu IVa. (2,0 điểm)

1. (1 điểm)

+ Bán kính của (S): $r = d(A, (P)) = \frac{|1 + 2.2 - (-1) - 4|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$ (0,5 điểm)

+ Phương trình của (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = \frac{2}{3}$ (0,5 điểm)

2. (1 điểm)

+ $\vec{u} = (-1; 1; 1)$ là VTCP của Δ và cũng là VTPT của (α) . (0,5 điểm)

+ Phương trình của (α) : $-1.(x-1) + 1.(y-2) + 1.(z+1) = 0$
hay $-x + y + z = 0$ (0,5 điểm)

Câu IVb. (1 điểm)

Giải phương trình sau trên tập số phức: $-2z^2 + 3z - 4 = 0$

+ $\Delta = -23 = 23i^2$ (0,5 điểm)

+ Phương trình đã cho có hai nghiệm phức: $z = \frac{3 \pm i\sqrt{23}}{4}$ (0,5 điểm)

B. Theo chương trình nâng cao:

Câu IVa. (2.0 điểm)

1. (1.0 điểm)

+ Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \\ 2x - 3y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad (0,25 \text{ điểm})$$

$\Rightarrow 2(1 + 2t) - 3(-1 + t) - t + 1 = 0$ (0,25 điểm)

$\Leftrightarrow 0.t = -6$ (vô nghiệm) (0,25 điểm)

+ Vậy $d \parallel (P)$ (0,25 điểm)

2. (1.0 điểm)

+ Gọi $N = d \cap d' \Rightarrow N(1 + 2t; -1 + t; -t)$

Ta có $\overrightarrow{MN} = (-1 + 2t; -2 + t; -t)$

$\vec{u} = (2; 1; -1)$ là VTCP của d . (0,25 điểm)

+ d vuông góc $d' \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \Leftrightarrow 2(-1 + 2t) - 2 + t + t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$ (0,25 điểm)

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{2}{3})$ là VTCP của d' . (0,25 điểm)

+ PTTS của d' :
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = -2t \end{cases} \quad (0,25 \text{ điểm})$$

Câu IV b. (1 điểm)

+ $z^3 - \bar{z} = (2 - 3i)^3 - (2 + 3i) = (-5 - 12i)(2 - 3i) - (2 + 3i) = -48 - 12i$ (0,5 điểm)

+ $|z^3 - \bar{z}| = \sqrt{2448}$ (0,5 điểm)