

Examen (session ordinaire)

Exercice 1: Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$.

- 1) Montrer que F est définie et continue sur \mathbb{R} .
- 2) Montrer que F est C^1 sur \mathbb{R} , et calculer l'expression de $F'(x)$.
- 3) En déduire l'expression de $F(x)$.

Exercice 2:

- 1) Calculer l'intégrale $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < x \text{ et } x^2 + y^2 > y\}$.

- 2) Soit l'intégrale $J = \int_0^\pi \frac{\ln(1 + \cos t)}{\cos t} dt$.

- a) Montrer que $J = \iint_\Delta f(x, y) dx dy$

où $f(x, y) = \frac{1}{1 + y \cos x}$ et $\Delta = [0, \pi] \times [0, 1[$.

- b) En déduire la valeur de J .

①

1) Calcul de l'intégrale $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$

$$\text{avec } D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < x \text{ et } x^2 + y^2 > y \right\}$$

Remarquons d'abord que $x^2 + y^2 < x$ entraîne que

$x > 0$ et donc en coordonnées polaires que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

D'autre part si $y < 0$ l'inégalité $x^2 + y^2 > y$ est évidemment vérifiée.

Soit $D_1 = \left\{ (x, y) \in D \mid y > 0 \right\}$ et

$$D_2 = \left\{ (x, y) \in D \mid y < 0 \right\}$$

On a donc

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \iint_{D_1} (x^2 + y^2) dx dy + \iint_{D_2} (x^2 + y^2) dx dy$$

Calcul de $\iint_{D_1} (x^2 + y^2) dx dy$:

D_1 est défini par $0 < y < x^2 + y^2 < x$, ce qui donne en coordonnées polaires

$$0 < r \sin(\theta) < r^2 < r \cos(\theta)$$

$$\text{donc : } 0 < \sin(\theta) < r < \cos(\theta)$$

$$\text{donc } 0 < \sin(\theta) < \cos(\theta)$$

$$\text{donc } \theta \in]0, \frac{\pi}{4}[$$

Donc D_1 est défini en coordonnées polaires par :

$$\theta \in]0, \frac{\pi}{4}[\text{ et } \sin(\theta) < r < \cos(\theta)$$

Donc :

$$\iint_{D_1} (x^2 + y^2) dx dy = \iint_{D'_1} r^2 dr d\theta$$

$$\text{avec } D'_1 = \{ (r, \theta) \mid \theta \in]0, \frac{\pi}{4}[\text{ et } \sin(\theta) < r < \cos(\theta) \}$$

Donc

$$\iint_{D_1} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\sin(\theta)}^{\cos(\theta)} r^2 dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{4} (\cos^4(\theta) - \sin^4(\theta)) \right) d\theta$$

~~$$\cos^4(\theta) - \sin^4(\theta) = \sin^2(\theta)$$~~

$$\text{On a } \cos^4(\theta) - \sin^4(\theta) = (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))$$

$$= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$$

$$= \cos(2\theta)$$

$$\text{Donc } \iint_{D_1} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{8} \left[\sin(2\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8}$$

(3)

Calcul de $\iint_{D_2} (x^2+y^2) dx dy$

On a $D_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < x \text{ et } y < 0 \right\}$

(Inutile d'ajouter $x^2+y^2 > y$ car $y < 0 \Rightarrow y < x^2+y^2$)

Donc en coordonnées polaires D_2 est défini par

$$r^2 < r \cos(\theta) \text{ et } \sin(\theta) < 0$$

donc $r < \cos(\theta)$ (et donc $\cos(\theta) > 0$) et $\sin(\theta) < 0$

donc $r < \cos(\theta)$, $\cos(\theta) > 0$ et $\sin(\theta) < 0$

donc $r < \cos(\theta)$ et $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$.

Donc

$$\iint_{D_2} (x^2+y^2) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left(\int_0^{\cos(\theta)} r^3 dr \right) d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^4(\theta)}{4} d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(\theta) d\theta$$

Car $\theta \mapsto \cos^4(\theta)$ est paire

D'autre part on a :

$$\cos^4(\theta) = \left(\cos^2(\theta) \right)^2 = \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 + 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta) \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 + 2 \cos(2\theta) + \frac{1}{2} (1 + \cos(4\theta)) \right)$$

$$= \frac{1}{8} (2 + 4 \cos(2\theta) + 1 + \cos(4\theta))$$

$$= \frac{1}{8} (3 + 4 \cos(2\theta) + \cos(4\theta))$$

$$\text{Hence } \iint_{D_2} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{32} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 + 4 \cos(2\theta) + \cos(4\theta)) d\theta$$

$$= \frac{3\pi}{64}$$

$$\text{Hence } \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{8} + \frac{3\pi}{64}$$

2) Calcul de l'intégrale $J = \int_0^{\pi} \frac{\ln(1+\cos(x))}{\cos(x)} dx$ (5)

a) On a:

$$J = \iint_{\Delta} \frac{dx dy}{1+y \cos(x)}$$

avec $\Delta = [0, \pi) \times [0, 1]$.

Donc

$$J = \int_0^{\pi} \left(\int_0^1 \frac{dy}{1+y \cos(x)} \right) dx$$

D'autre part une primitive de $y \mapsto \frac{1}{1+y \cos(x)}$

est $\frac{\ln(1+y \cos(x))}{\cos(x)}$, donc

$$\int_0^1 \frac{dy}{1+y \cos(x)} = \left[\frac{\ln(1+y \cos(x))}{\cos(x)} \right]_{y=0}^{y=1}$$

$$= \frac{\ln(1+\cos(x))}{\cos(x)}$$

Donc $J = \int_0^{\pi} \frac{\ln(1+\cos(x))}{\cos(x)} dx = \iint_{\Delta} \frac{dx dy}{1+y \cos(x)}$

b) En changeant l'ordre d'intégration entre x et y
on a :

$$J = \iint_{\Delta} \frac{dx dy}{1+y \cos(x)} = \int_0^{\pi} \left(\int_0^1 \frac{dy}{1+y \cos(x)} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+y \cos(x)} \right) dy$$

Calcul de $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+y \cos(x)}$

Pour le calcul d'une telle intégrale la méthode générale est de poser $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, avec

$$dx = \frac{2du}{1+u^2} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

si $x \rightarrow \pi$, alors $\frac{x}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ et $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow +\infty$

on a donc

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+y \cos(x)} = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{1+y \left(\frac{1-u^2}{1+u^2} \right)}$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+y + (1-y)u^2}$$

$$= \frac{2}{1+y} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + \frac{1-y}{1+y} u^2} \quad (\neq)$$

On pose $t = \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} u$, donc $du = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} dt$

et donc: $\int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + \frac{1-y}{1+y} u^2} = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$

$$= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$$

Finalement on obtient

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+y \cos(x)} = \frac{\pi}{\sqrt{1-y^2}}$$

Donc

$$J = \int_0^1 \frac{\pi}{\sqrt{1-y^2}} dy = \pi \left[\arcsin(y) \right]_0^1$$

$$= \pi \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi^2}{2}$$