



centro de copiado

La Cópia

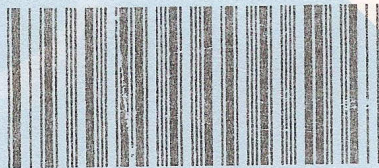
Ciudad Universitaria Pabellón 2 PB

ANALISIS MATEMATICO

Ciencias Económicas

Trabajos Prácticos

Fundación Enseñar Ciencia



ISBN 987-9419-40-5

ISBN. 987-9419-40-5

Todos los derechos reservados.
Queda hecho el depósito que
marca la ley 11.723

2008 © CCC Educando
Ciudad Universitaria, Pabellón II,
1428 - Buenos Aires - Argentina. Email,
cccdivisioncopia@ciudad.com.ar

Agradecemos la colaboración de los profesores del Ciclo Básico Común y de todos aquellos que han hecho posible la realización de la presente obra

Promueva la creatividad respete el derecho de autor

Editorial CCC Educando
Av Warnes 2361/6(1427)
Capital Federal
Con una tirada de 3000 ejemplares
Impreso en Argentina
Queda hecho el depósito que previene la ley 11.723

**PRACTICA 0
PRELIMINARES**

Ejercicio 1.- Calcular

a) $\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{6} + 2 - \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{3} \right) \right) - \frac{1}{5} \left(5 \cdot \frac{1}{2} - \frac{7}{3} \right)$

b) $\left(\frac{4}{3} : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \right) : \left(\left(\frac{2}{5} + 1 \right) \cdot \frac{3}{2} \right)$

c) $\left[\left(2 - \frac{1}{3} \right)^2 - \left(2 + \frac{1}{3} \right)^2 \right]^{-1}$

d) $\left[\frac{1}{7} \left(5 + \frac{1}{7} \right) + 1 : \left(\frac{7}{8} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$

Ejercicio 2.- En cada caso, decidir si los dos números racionales son iguales

$\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{6}$; $\frac{4}{3}$ y $\frac{16}{9}$; $\frac{-2}{3}$ y $\frac{4}{-6}$

7 y $\frac{2}{14}$; 10^{-3} y $\frac{2}{1000}$; $\frac{2 + \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}$ y $\frac{5}{3}$

Ejercicio 3.-

a) Escribir el número decimal correspondiente a

$\frac{1}{4}$; $\frac{7}{20}$; $\frac{8}{25}$; $\frac{425}{6250}$

b) Hallar un número decimal que aproxime a

$\frac{1}{9}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{11}{6}$; $\frac{37}{15}$

c) Decidir si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas
(\cong significa "aproximadamente igual")

$\frac{3}{16} = 0,187$; $\frac{3}{16} = 0,1875$; $\frac{3}{16} \cong 0,18$; $\sqrt{\frac{49}{36}} = \frac{7}{6}$

$\frac{1}{3} = 0,3$; $\sqrt{5} = 2,2$; $\sqrt{5} \cong 2,23$; $\sqrt{\frac{49}{36}} = 0,167$

d) Hallar tres números que tengan raíz cuadrada entera.

e) Hallar tres números que tengan raíz cúbica entera.

Ejercicio 4.-

a) Decidir cuáles de las siguientes desigualdades son verdaderas

$$\frac{33}{2} < \frac{50}{3} ; \quad \frac{80}{99} < \frac{4}{5} ; \quad -\frac{9}{2} < -5 ; \quad -\frac{4}{5} > -\frac{5}{4} ; \quad \frac{3}{16} > \frac{1875}{10000}$$

b) Ordenar en forma creciente

$$-\frac{8}{9} ; \quad \sqrt{3} ; \quad 1 ; \quad \sqrt{5} ; \quad \frac{1}{\sqrt{3}} ; \quad -1 ; \quad -\frac{9}{8} ; \quad -\sqrt{3} ; \quad \sqrt{0,001} ; \quad 0,001$$

c) ¿Cuál de dos amigos come más pizza: el que come las cinco sextas partes de la mitad de la pizza, o el que come las tres cuartas partes de lo que dejó el primero?

Ejercicio 5.- Decidir, en cada caso, si las expresiones dadas son iguales

a) $\sqrt{9 \cdot 25}$ y $\sqrt{9} \cdot \sqrt{25}$ \sqrt{ab} y $\sqrt{a} \sqrt{b}$ ($a, b \geq 0$)

$$\sqrt{8}$$
 y $2 \cdot \sqrt{2}$ $\frac{1}{\sqrt{5}}$ y $\frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\sqrt{9+16}$ y $\sqrt{9} + \sqrt{16}$ $\sqrt{a+b}$ y $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ($a, b \geq 0$)

$$\sqrt{100-36}$$
 y $\sqrt{100} - \sqrt{36}$ $\sqrt{a-b}$ y $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ($a \geq b \geq 0$)

c) $(5+3)^2$ y 5^2+3^2 $(a+b)^2$ y a^2+b^2 $(a+b)^2$ y $a^2+2ab+b^2$

$$(5-3)^2$$
 y 5^2-3^2 $(a-b)^2$ y a^2-b^2 $(a-b)^2$ y $a^2-2ab+b^2$

d) $\frac{1}{4+3}$ y $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$ $\frac{1}{a+b}$ y $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ($a, b, a+b \neq 0$)

$$\frac{5+8}{5}$$
 y 8 $\frac{5+8}{5}$ y $1 + \frac{8}{5}$

$$\frac{a+b}{a}$$
 y b ($a \neq 0$) $\frac{a+b}{a}$ y $1 + \frac{b}{a}$ ($a \neq 0$)

Ejercicio 6.- Desarrollar

a) $(x-3)^2$ $(x-3)(x+2)$ $(x-y)(x+y)$

b) Escribir como producto de dos factores

$a^2 - 36$ $a^4 - 81$ $x^2 - 7x$

$a^4 + 4a^2 + 4$ $-x^2 + 10x - 25$ $x^3 + 9x^2$

Ejercicio 7.- Resolver las siguientes ecuaciones

$x + 5 = 13$

$3x + 2 = -5$

$6 - \frac{x}{2} = 4$

$5x + 1 = -2x + 15$

$1 + x = x - 3$

$\frac{6}{x} + 1 = 5$

$\frac{6}{x+1} = 5$

$\frac{2x-3}{x+4} = -3$

$\frac{2x-1}{-1} = \frac{4x+3}{3}$

$x^2 - 3x = x^2 + 3x + 2$

$\frac{12x^2-4}{4x-1} = 3x$

$\frac{x+1}{2x} = 0$

$\frac{2}{2x-1} = \frac{-2}{5x+3}$

$\frac{5}{x+2} - \frac{1}{\frac{2x+4}{x}} = \frac{-3}{3x+6}$

Ejercicio 8.-

a) Calcular

$(-2)^4$

-2^4

$\left(-\frac{1}{5}\right)^0$

$\left(-\frac{2}{3}\right)^3$

$(0,02)^2$

3^{-2}

$(-2)^{-3}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$

$\left(\frac{4}{9}\right)^{1/2}$

$\left(\frac{1}{10}\right)^{-3}$

$\left(\frac{9}{4}\right)^{-1/2}$

$\sqrt[3]{\frac{-27}{8}}$

$\sqrt{4^2}$

$\sqrt{(-4)^2}$

$16^{-3/4}$

b) Resolver y simplificar

$$\left[\left(\frac{1}{7}\right)^3\left(\frac{1}{7}\right)^4\right]^{2/7}$$

$$\left[\left(\frac{3}{2}\right)^6 : \left(\frac{3}{2}\right)^4\right]^{-1}$$

$$\frac{a^2 a^5 a^{-4} a^7}{a^3 a^9 a^{-2} a}$$

$$(5^{5/2} 5^{7/2})^{1/2}$$

$$\left[(-32)^{4/5}\right]^{-3/2}$$

$$(a^{1/2} a^{-1/3})^6$$

Ejercicio 9.-

a) Escribir en lenguaje algebraico las siguientes informaciones relativas a un rectángulo de base x y altura y .

- ♣ El rectángulo es un cuadrado.
- ♣ La base es el triple de la altura.
- ♣ La base excede en cuatro unidades a la altura.
- ♣ La altura es $\frac{4}{7}$ de la base.
- ♣ El rectángulo tiene 28 cm de perímetro.
- ♣ La diagonal del rectángulo mide 13 cm.
- ♣ El área del rectángulo es 100 cm².

b) Asociar cada enunciado con la expresión algebraica correspondiente:

I Cinco menos que el doble de un número

A $(a - b)^2$

II Cinco menos el doble de un número

B $2a - 5$

III La diferencia de dos cuadrados

C $\frac{a+b}{2}$

IV El cuadrado de una diferencia

D $a^2 - b^2$

V La mitad de una suma de dos números

E $5 - 2a$

Ejercicio 10.-

- a) María tiene cuarenta y seis años y Juan, doce; ¿dentro de cuántos años la edad de María será el triple de la edad de Juan?
- b) Una salsa de tomate se ofrece en dos tipos de envase, lata y tetrabrick. Las dimensiones de la lata son de 6cm de diámetro en la base y 11cm de altura, las del tetrabrick son 7cm y 4cm en los lados de la base y 12cm de altura. ¿Cuál de los dos envases tiene mayor capacidad?
- c) Un automóvil 0km cuesta $\$18\,000$. Si se desvaloriza a razón de un 10% anual, ¿cuál será el valor del mismo dentro de dos años?
- d) El costo de una mercadería es de $\$15$. ¿Cuál debe ser el precio de lista para que, en una promoción en la que se ofrece un 10% de descuento sobre el precio de lista, el comerciante gane un 20% sobre el costo?
- e) Una empresa se dedica a la compra y venta de inmuebles. Cierta día la empresa vende dos propiedades, cada una de ellas en $\$120\,000$. Se sabe que con la primera propiedad ganó un 20% de lo invertido al adquirirla, en tanto que con la segunda, perdió un 20% de lo invertido. ¿Cuál es la ganancia o pérdida neta para la empresa por la compraventa de las dos propiedades?

PRACTICA 1 NUMEROS REALES

Ejercicio 1.- Representar en la recta real los siguientes números reales

a) 0 ; 1 ; 2 ; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{2}$; $\sqrt{2}$

b) 0 ; 1 ; -2 ; -3 ; 3 ; $\sqrt{3}$; $\frac{1}{3}$; $\sqrt{\frac{1}{3}}$; $-\sqrt{\frac{1}{4}}$; $-\frac{1}{4}$

Ejercicio 2.- Representar en la recta real los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}

a) $[-5, 3] = \{x \in \mathbb{R} / -5 \leq x \leq 3\}$

b) $(-\infty, -1) = \{x \in \mathbb{R} / x < -1\}$

c) $\{n \in \mathbb{N} / 2 \leq n < 6\}$

d) $\{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$

Ejercicio 3.- Representar en la recta numérica

a) Todos los números reales mayores que -3 .

b) Todos los números reales menores o iguales que 4 .

c) Todos los números reales mayores que 2 y menores o iguales que $\frac{9}{2}$.

d) Los intervalos

$(1, 4)$; $[-2, 3)$; $(0, 5]$; $[-3, \frac{1}{2}]$

$(-\infty, -2)$; $(-\infty, -1]$; $[\frac{5}{4}, +\infty)$; $(\sqrt{\frac{5}{4}}, +\infty)$

e) Las uniones de intervalos

$(-3, 1) \cup (0, 4]$; $[-2, -1] \cup [-1, 3)$; $[2, 3] \cup (0, 5)$; $(-\infty, 1) \cup (3, 8)$

f) Las intersecciones de intervalos

$(-3, 1) \cap (0, 4]$; $[-2, -1] \cap [-1, 3)$; $[2, 3] \cap (0, 5)$; $(-\infty, 1) \cap (3, 8)$

Ejercicio 4.- Decidir cuáles de los siguientes números reales pertenecen al intervalo $(-\infty, 2)$

$$-2 ; 2 ; \sqrt{2} - 1 ; 1 - \frac{7}{4} ; \sqrt[3]{9} ; \sqrt[3]{-27} ; \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

Ejercicio 5.- Representar en la recta numérica y escribir como intervalo o unión de intervalos

a) $\{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{x} < 2\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} / \frac{3}{x} > 4\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} / \frac{2}{x} - 3 < -1\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{x} \geq \frac{64}{x}\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} / 8x < x^2\}$

f) $\{x \in \mathbb{R} / -\frac{5}{x} + 1 > 0\}$

g) $\{x \in \mathbb{R} / \frac{6}{x-4} > -1\}$

h) $\{x \in \mathbb{R} / \frac{4}{x+2} < -2\}$

i) $\{x \in \mathbb{R} / \frac{3x+2}{x+4} < 1\}$

j) $\{x \in \mathbb{R} / \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+1} > 1\}$

Definición:

$$\text{El valor absoluto de un número real } a \text{ es } |a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejercicio 6.-

a) Representar en la recta numérica los siguientes conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} / |x| = 5\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / |x| = 0\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} / |x| = -1\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} / |x-4| = 2\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} / |2x+1| = 3\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{R} / |5x-4| = 0\}$$

b) Escribir como intervalo o unión de intervalos y representar en la recta numérica los siguientes conjuntos

$$G = \{x \in \mathbb{R} / |x-1| < 3\}$$

$$H = \{x \in \mathbb{R} / |x+2| > 4\}$$

$$I = \{x \in \mathbb{R} / |3x-1| > 8\}$$

$$J = \{x \in \mathbb{R} / |8x+3| < 5\}$$

c) Expresar los siguientes conjuntos en la forma $\{x \in \mathbb{R} / |x - a| < r\}$ o bien $\{x \in \mathbb{R} / |x - a| > r\}$ según corresponda, para valores de a y r adecuados.

i) Los reales que distan del 0 en menos de 2 .

ii) Los reales que distan del -1 en más de 1 .

iii) Los reales que distan de $-1/2$ en menos de 0,2 .

iv) $(-5, 3)$

v) $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

Ejercicio 7.- Hallar valores de a y b tales que $|a + b| < |a| + |b|$.

Definición:

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se dice acotado superiormente si existe un número real c tal que para todo $a \in A : a \leq c$. Decimos que c es cota superior de A .

Definición:

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío acotado superiormente. El número real s se llama supremo de A si cumple con las dos condiciones siguientes:

$S_1)$ s es cota superior de A .

$S_2)$ Si c es cota superior de A entonces $s \leq c$.

Es decir s es la menor de las cotas superiores de A .

Ejercicio 8.- Dados los siguientes conjuntos de números reales

a) Decidir cuáles están acotados superiormente.

b) Dar varias cotas superiores.

c) Encontrar, si existe, la menor cota superior, es decir, el supremo.

$$A = (0, 7)$$

$$B = \mathbb{N}$$

$$C = \{1, 9; 1, 99; 1, 999; \dots\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} / |x - 1| < 2\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} / |3x + 2| > 4\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{R} / \frac{9}{|2x|} > 3\}$$

$$G = (0, +\infty)$$

$$H = (-\infty, 5)$$

$$I = (0, 1) \cup \left(3, \frac{7}{2}\right)$$

Definición:

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se dice acotado inferiormente si existe un número real d tal que para todo $a \in A : d \leq a$. Decimos que d es cota inferior de A .

Definición:

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío acotado inferiormente. El número real i se llama ínfimo de A si cumple con las dos condiciones siguientes:

$I_1)$ i es cota inferior de A .

$I_2)$ Si d es cota inferior de A entonces $d \leq i$.

Es decir i es la mayor de las cotas inferiores de A .

Ejercicio 9.- Para los conjuntos del ejercicio anterior

a) Decidir cuáles están acotados inferiormente.

b) Dar varias cotas inferiores.

c) Encontrar, si existe, la mayor de las cotas inferiores, es decir, el ínfimo.

Ejercicio 10.- Hallar, cuando exista, el supremo y el ínfimo de los conjuntos de los ejercicios 3 y 5.

Ejercicio 11.- Escribir como intervalo o unión de intervalos y hallar, cuando exista, el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} / |2x - 1| < 5\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} / |x + 4| < 1\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} / |3x - 6| > 9\} \quad E = \{x \in \mathbb{R} / |x + 2| > 6\}$$

EJERCICIOS SURTIDOS

Ejercicio 1.- Escribir el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / 0 < 1 - \frac{2}{3x+1} < 1\}$ como intervalo o unión de intervalos.

Ejercicio 2.- Escribir el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{x} < \frac{2x+1}{3x}\}$ como intervalo o unión de intervalos y hallar, si existen, el supremo y el ínfimo.

Ejercicio 3.- En cada uno de los siguientes problemas marcar la única respuesta correcta

a) Si $A = \{x \in \mathbb{R} / |x+1| \leq 4\}$, entonces

- ☐ $\sup(A) = 3$ e $\inf(A) = -5$
☐ $\sup(A) = 1$ y A no tiene ínfimo
☐ $\sup(A) = 3$ y A no tiene ínfimo
 ☐ $\sup(A) = 1$ e $\inf(A) = -3$

b) Una cota inferior de $A = \{x \in \mathbb{R} / 5x+4 \geq 2x-1\}$ es

- ☐ $-\frac{5}{3}$
☐ $\frac{5}{3}$
☐ -1
☐ 0

c) El conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / \frac{3}{x} > -2\}$ es igual a

- ☐ $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (0, +\infty)$
☐ $(-\frac{3}{2}, 0) \cup (0, \frac{3}{2})$
☐ $(-\frac{3}{2}, 0) \cup (0, +\infty)$
☐ $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

d) El ínfimo del conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / |3x-2| < 1\}$ es igual a

- ☐ -1
☐ $-\frac{1}{3}$
☐ $\frac{1}{3}$
☐ 1

PRACTICA 2 FUNCIONES

Ejercicio 1.- Representar en el plano los puntos

$$A = (2, 0) \quad B = (0, -2) \quad C = (3, \frac{1}{2}) \quad D = (-4, 1)$$

$$E = (3, -3) \quad F = (\sqrt{2}, 1) \quad G = (-1, -2) \quad H = (-1, 2)$$

Ejercicio 2.- Representar en el plano todos los puntos que tienen

- a) abscisa -3
- b) ordenada $\frac{1}{2}$
- c) abscisa de módulo 4
- d) ordenada mayor que -5
- e) abscisa y ordenada iguales
- f) abscisa y ordenada menores que 0
- g) ordenada mayor o igual que 1 y abscisa menor que 4
- h) ordenada entre -1 y 1 y abscisa entre -4 y 4

Ejercicio 3.- Sea $f(x) = 2x + 3$

- a) Calcular $f(5)$, $f(0)$, $f(-2)$
- b) Trazar el gráfico de la función
- c) Hallar analítica y gráficamente los x tales que
 - i) $f(x) = 0$
 - ii) $f(x) = -1$
 - iii) $f(x) = 5$
- d) Trazar la recta de ecuación $y = 2x + 3$. Decidir cuáles de los siguientes puntos pertenecen a dicha recta
 $(0, 1)$; $(-1, 1)$; $(1, 5)$; $(\frac{1}{2}, 4)$

Práctica 2

Ejercicio 4.- Trazar los gráficos de las siguientes funciones lineales en un mismo sistema de coordenadas cartesianas

a) $f(x) = 3x$; $g(x) = 5x$; $h(x) = \frac{2}{3}x$

b) $f(x) = 2x$; $g(x) = -2x$

c) $f(x) = 4x$; $g(x) = 4x + 2$; $h(x) = 4x - 3$

Ejercicio 5.-

a) Encontrar, en cada caso, una función lineal que satisfaga

i) $f(1) = 4$, $f(-3) = 2$

ii) $f(-1) = 5$, $f(85) = 5$

b) Calcular la pendiente de cada una de las rectas que son gráficos de las funciones lineales del inciso anterior.

Ejercicio 6.-

a) Hallar la ecuación de la recta de pendiente m que pasa por P , siendo

i) $P = (-2, 3)$, $m = 2$ ii) $P = (1, 5)$, $m = 0$

iii) $P = (3, -4)$, $m = -1$ iv) $P = (\frac{1}{5}, -\frac{3}{5})$, $m = -\frac{1}{2}$

b) Encontrar la pendiente de la recta que pasa por P y Q siendo

i) $P = (1, 2)$, $Q = (-4, 3)$ ii) $P = (5, 8)$, $Q = (-6, 8)$

iii) $P = (0, 2)$, $Q = (1, 4)$ iv) $P = (1, 2)$, $Q = (-1, 4)$

Ejercicio 7.-

a) Hallar el valor de a para que la recta de ecuación $y = ax + 5$ pase por el punto $(1, 4)$.

b) Hallar el valor de b para que la recta de ecuación $y = -2x + b$ pase por el punto $(-3, 1)$.

Ejercicio 8.-

a) ¿Existe una función lineal que responda a la siguiente tabla de valores?

x	$f(x)$
-1	2
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
1	$-\frac{4}{3}$

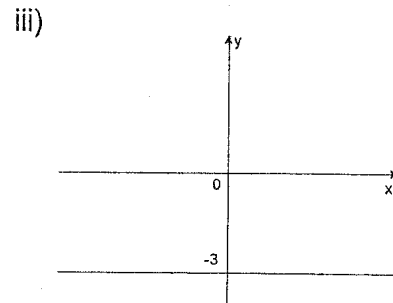
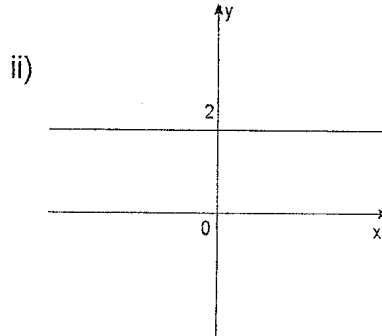
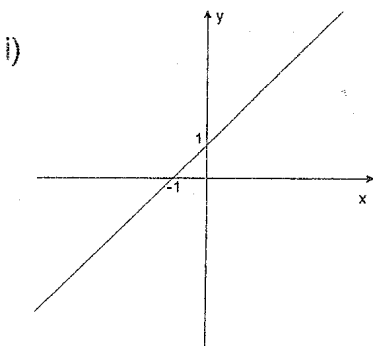
b) Completar la siguiente tabla de valores sabiendo que $y = f(x)$ es lineal.

x	$f(x)$
-1	2
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
	$-\frac{4}{3}$
1	

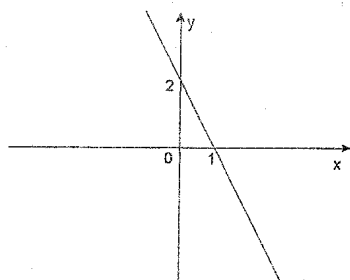
Ejercicio 9.- A partir de los siguientes gráficos

a) Escribir la función lineal correspondiente a cada recta.

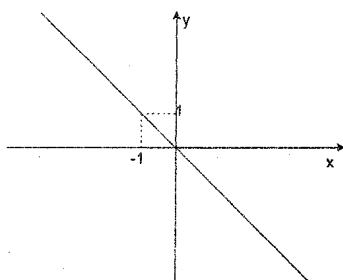
b) Determinar el valor de la pendiente.



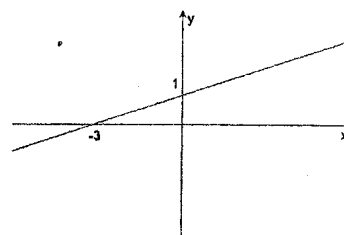
iv)



v)



vi)



Ejercicio 10.- Dada la recta que pasa por $(3, 2)$ y $(4, a)$

- ¿Para qué valor de a la pendiente vale 8?
- ¿Para qué valor de a la recta corta el eje y en el punto $(0, 3)$?
- ¿Para qué valor de a la recta pasa por el punto $(2, 9)$?
- Para los valores hallados en los incisos anteriores, calcular en qué punto las rectas cortan el eje x .

Ejercicio 11.- Dados los siguientes pares de funciones lineales f y g , determinar gráfica y analíticamente el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \geq g(x)\}$

a) i) $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = 2x - 1$

ii) $f(x) = -2x + 1$, $g(x) = 4x + 1$

iii) $f(x) = 7x - 1$, $g(x) = -x - 4$

b) Hallar, si existen, el supremo y el ínfimo de A en cada caso

i) $f(x) = -4x - 1$, $g(x) = 2x - 3$

ii) $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 2x - 5$

iii) $f(x) = 3$, $g(x) = -5x - 2$

c) Determinar cuáles de las funciones f y g de los incisos anteriores son crecientes y cuáles decrecientes. Determinar cuál crece más rápidamente y cuál decrece más rápidamente.

Ejercicio 12.- Graficar las siguientes funciones

a) $f(x) = \left| \frac{x}{4} \right|$ b) $f(x) = |2x - 1|$

c) $f(x) = |x + 3|$ d) $f(x) = |x - 5|$

Ejercicio 13.- Dadas las siguientes funciones f y g , determinar gráfica y analíticamente el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \geq g(x)\}$

a) $f(x) = 3$, $g(x) = |x - 1|$

b) $f(x) = x$, $f(x) = |x + 3|$

Ejercicio 14.- Supongamos que la demanda semanal de un producto es de 100 unidades cuando el precio es de \$58 por unidad y de 200 unidades con precio de \$51 cada una.

a) Determinar la función demanda $p = D(x)$, suponiendo que es lineal.

b) Calcular $D(75)$ ¿Qué representa?

Ejercicio 15.- Un fabricante de zapatos está dispuesto a colocar en el mercado 50 (miles de pares) cuando el precio es \$35 por par y 75 cuando su precio es de \$50.

a) Obtener la función de oferta $p = O(q)$, suponiendo que el precio p y la cantidad q tienen una relación lineal, y graficarla.

b) Se ha podido determinar que la ecuación de demanda de su producto es

$$p = D(q) = -\frac{1}{2}q + 38.$$

Hallar la cantidad de pares de zapatos que debe fabricar para que la oferta coincida con la demanda (cantidad de equilibrio). ¿Cuál es el precio (precio de equilibrio) del par de zapatos para esta cantidad?

c) En un mismo sistema de coordenadas graficar las funciones de oferta y de demanda e interpretar geométricamente el punto de equilibrio (cantidad , precio).

Ejercicio 16.- Una empresa vende un producto a \$65 por unidad. Los costos variables por unidad en concepto de materiales y mano de obra ascienden a \$37. Los costos fijos mensuales ascienden a \$10 000.

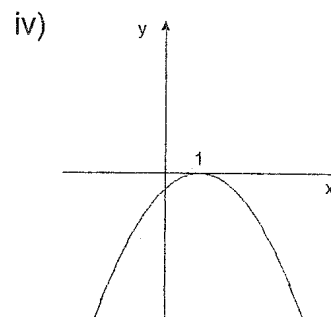
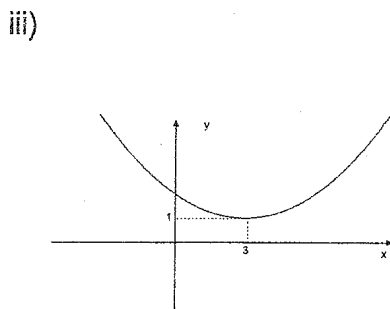
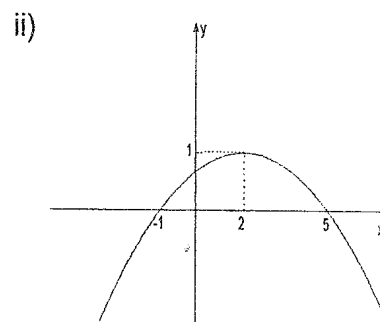
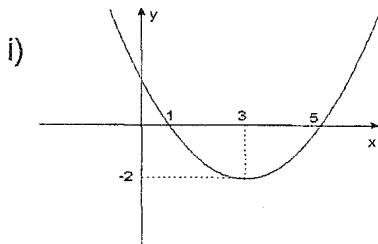
Práctica 2

- a) Encontrar la función de costo total $y = C(x)$ expresada en términos de x , número de unidades producidas y vendidas.
- b) Encontrar la función de ingreso total $y = I(x) = xD(x)$ expresada en términos de x .
- c) Encontrar la función de utilidad (utilidad=ingreso total-costo total) ¿Qué utilidad se obtiene si las ventas son de 2000 unidades?
- d) ¿Cuántas unidades se deben vender para tener una utilidad mayor que \$60 000?

Ejercicio 17.- En cada caso, trazar el gráfico de la función cuadrática y hallar las coordenadas del vértice de la parábola que representa

- | | | | |
|-------------------|-----------------------|-----------------------------------|------------------------------|
| i) $f(x) = 3x^2$ | ii) $f(x) = x^2 + 4$ | iii) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3$ | iv) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ |
| v) $f(x) = -2x^2$ | vi) $f(x) = -x^2 + 2$ | vii) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 1$ | viii) $f(x) = -x^2 - 2x - 7$ |

Ejercicio 18.- Hallar los conjuntos de positividad y de negatividad, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, el máximo o mínimo de las funciones cuadráticas cuyos gráficos figuran a continuación



Ejercicio 19.- En las funciones del ejercicio 17

- a) Determinar intervalos donde la función es creciente e intervalos donde es decreciente
- b) ¿Cómo se comporta $f(x)$ cuando x tiende a más y a menos infinito?
- c) Determinar los valores máximos o mínimos y los valores de la variable donde alcanza tales extremos.

Ejercicio 20.- Dada $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ hallar los x tales que

- a) $f(x) = 1$
- b) $f(x) = 6$
- c) $f(x) = -2$
- d) $f(x) = 3x + 9$
- e) $f(x) = x^2 - 4x + 7$
- f) $f(x) = -3x + 9$

Ejercicio 21.- Hallar, si existen, el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} / x(x-2) < 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / (x-3)(x+1) > 0\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 2 < 0\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - 8 \leq x^2 - 2x + 7\}$$

Ejercicio 22.- Cuando se produce una cantidad x (en miles de toneladas) de una cierta mercadería dos productores reciben un beneficio mensual (en miles de pesos) de $g_1(x) = -x^2 + 8x - 3$, $g_2(x) = 2x - 10$.

- a) Graficar ambas funciones de ganancia.
- b) ¿Cuántas toneladas debe producir cada productor para obtener la misma ganancia?
- c) ¿Para qué producción las ganancias obtenidas por el primer productor cuadruplican las del segundo?

Ejercicio 23.- La función de demanda para el producto de un fabricante es $p = D(q) = 1200 - 3q$, donde p es el precio (en pesos) por unidad cuando se tiene una demanda semanal de q unidades.

a) Expresar los ingresos totales $I = I(q)$ (*ingresos totales* = pq) en función de la demanda. Hacer un gráfico de tal función.

b) Calcular el nivel de producción semanal que maximiza los ingresos totales del fabricante y determinar el ingreso máximo.

Ejercicio 24.- Representar gráficamente, en forma aproximada, las siguientes funciones polinómicas

a) $f(x) = 2x^3$ b) $f(x) = 2x^3 - 1$

c) $f(x) = 2(x - 1)^3$ d) $f(x) = 2x^4$

e) $f(x) = 2x^4 - 1$ f) $f(x) = 2(x - 1)^4$

Ejercicio 25.- Hallar el dominio de f y hacer un gráfico aproximado. Analizar en cada caso su comportamiento en el infinito

a) $f(x) = -\frac{1}{x}$ b) $f(x) = \frac{4}{x-1}$ c) $f(x) = \left| \frac{1}{x} \right|$ d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Ejercicio 26.- Hallar el dominio de las siguientes funciones

a) $f(x) = \frac{5}{x-3}$ b) $f(x) = \frac{2}{x+4}$ c) $f(x) = \left| \frac{1}{x-2} \right|$

d) $f(x) = \frac{3x-5}{2x+1}$ e) $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$ f) $f(x) = \frac{1}{-x^2+x+2}$

g) $f(x) = \frac{2}{4x^2-8x+3}$ h) $f(x) = \frac{3}{x^2-x+2}$ i) $f(x) = \frac{6x^2}{9-x^2}$

PRACTICA 3
COMPOSICION DE FUNCIONES

Ejercicio 1.- Calcular $f \circ g$ y $g \circ f$ indicando el dominio en cada caso

a) $f(x) = 2x + 1$ $g(x) = 3x + 4$

b) $f(x) = 3x + 2$ $g(x) = x^2$

c) $f(x) = \frac{3x+1}{2x-4}$ $g(x) = x^3$

d) $f(x) = \frac{2x+1}{x-4}$ $g(x) = \frac{2}{x}$

Ejercicio 2.-

a) La función $f(x) = 1,8x + 32$ expresa la temperatura en grados Fahrenheit conocida la misma en grados Celsius. Sabiendo que el papel arde aproximadamente a $451^\circ F$ (¿leyó la novela de Ray Bradbury?), ¿a cuántos grados Celsius tendrá que exponer esta práctica para quemarla?

b) Dar la función que permite, dada una temperatura cualquiera en grados Fahrenheit, obtener la misma en grados Celsius.

Ejercicio 3.- Hallar el dominio y representar gráficamente las siguientes funciones

a) $f(x) = \sqrt{x}$ b) $f(x) = \sqrt{x-1}$ c) $f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{2}}$

d) $f(x) = \sqrt{1-x}$ e) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ f) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

Ejercicio 4.- Hallar los x que verifican

a) $x^2 = 9$ b) $\sqrt{x} = 5$

c) $\sqrt[3]{2x+8} = 4$ d) $\sqrt{3x+7} = 5$

e) $\sqrt[3]{(x-1)^2} = 4$ f) $3 + \sqrt{x^2+5} = 6$

Práctica 3

Ejercicio 5.- Calcular y dar el dominio de f^{-1}

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2x - 3$ b) $f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x-2}$
- c) $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{3}{x}$ d) $f: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$
- e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^3 + 1$ f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 + 3$
- g) $f: [-5, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{x+5}$ h) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt[3]{2x-5}$

Ejercicio 6.- Una empresa calcula que el costo de producción de x unidades de un artículo de consumo, es igual, medido en pesos, a $C(x) = 300 + 50\sqrt{x}$. Calcular a partir de cuántas unidades producidas, el costo de producción supera los \$10 000.

Ejercicio 7.- La función de demanda de x unidades de un artículo medida en pesos es igual a $p = D(x) = \sqrt{3600 - 5x}$, $0 \leq x \leq 720$. Calcular para qué valores de la producción la demanda supera los \$15.

Ejercicio 8.- Graficar las siguientes funciones y hallar su imagen. Analizar en cada caso su comportamiento en el infinito

- a) $f_1(x) = e^x - 2$ b) $f_2(x) = e^{x-2}$
- c) $f_3(x) = e^{-x+2}$ d) $f_4(x) = e^{-x+2} + 4$

Ejercicio 9.- Calcular el dominio de las siguientes funciones, graficarlas y hallar su imagen. Analizar en cada caso su comportamiento en el infinito

- a) $g_1(x) = \ln(-x)$ b) $g_2(x) = 1 + \ln(x)$
- c) $g_3(x) = \ln(x-1)$ d) $g_4(x) = \ln(x^2)$

Ejercicio 10.- Dadas las funciones

$$f_1(x) = e^{2x}$$

$$f_2(x) = e^{1-x}$$

$$f_3(x) = e^{x-2}$$

$$f_4(x) = \ln\left(\frac{2}{x}\right)$$

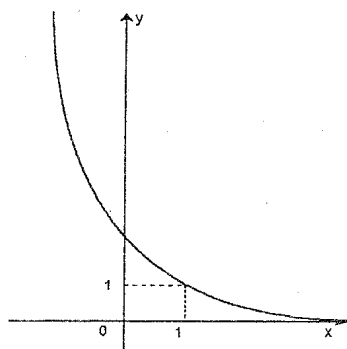
$$f_5(x) = \ln(1+x)$$

$$f_6(x) = 2\ln(-x)$$

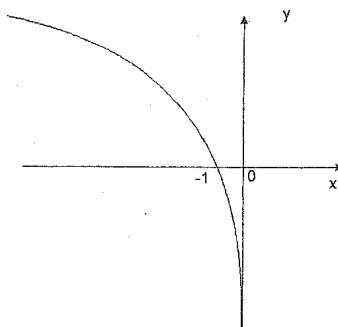
a) Decidir cuál de los siguientes gráficos corresponde a cada una de ellas.

b) En cada caso dar la fórmula y el gráfico de la correspondiente función inversa.

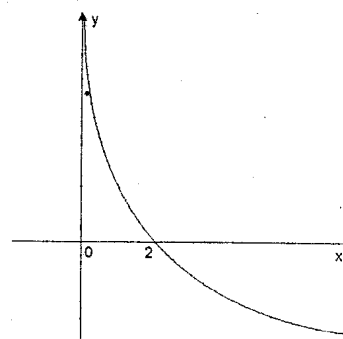
i)



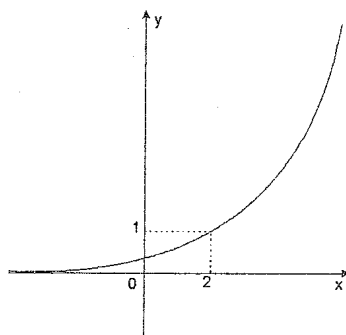
ii)



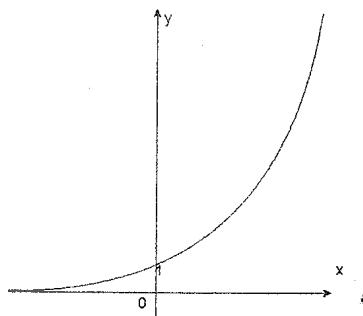
iii)



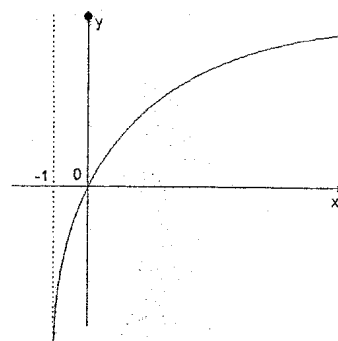
iv)



v)



vi)



Ejercicio 11.- Para las siguientes funciones, hallar el dominio, los ceros y los conjuntos de positividad y negatividad

a) $f_1(x) = \ln(x-1)$

b) $f_2(x) = \ln(x^2 - 2)$

c) $f_3(x) = \ln(x) + 3$

d) $f_4(x) = \ln(4 - 2x)$

Ejercicio 12.- Hallar los x que verifican

- a) $e^{x+5} = 1$ b) $3e^{2x-1} = 15$ c) $\ln(x-3) = 0$
- d) $\sqrt[3]{2x+8} = 2$ e) $3^{x+1} = 27$ f) $3^{x+2} = \frac{1}{3}$

Ejercicio 13.- Hallar $f^{-1}(x)$ e indicar su dominio

- a) $f(x) = 1 + 2e^{4x+3}$ b) $f(x) = \ln(3x+6)$ c) $f(x) = \frac{e^{2x+5} - 7}{3}$
- d) $f(x) = 4\ln(5x-2) + 1$ e) $f(x) = 1 + 5e^{\sqrt{x-3}}$ f) $f(x) = 3 - \ln(2x^2 - 1)$

Ejercicio 14.- Un capital C se deposita en un banco durante t meses a un interés del $r\%$ mensual (con capitalización mensual) produciendo un monto $M(t) = C\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$.

- a) ¿A cuánto ascenderá un capital de \$100 000 al 0,4% mensual durante dos años?
- b) ¿Y al cabo de cinco años y cinco meses?
- c) ¿Cuánto debería invertirse para ganar \$100 000 en 3 años al 0,3% mensual?
- d) ¿En cuánto tiempo se triplicará el capital al 5% mensual (con capitalización mensual)?

Ejercicio 15.- Si la función exponencial $M(x) = 3\,000(1,25)^x$ se interpreta como un interés compuesto

- a) ¿Cuál es el capital inicial?
- b) ¿Cuál es el interés?

Ejercicio 16.- El número de habitantes de la República Argentina podría estimarse aproximadamente mediante la fórmula $N(t) = 37e^{0,01t}$ millones de habitantes, donde la variable t indica el número de años transcurridos a partir del año 2004. Siguiendo esta hipótesis

- a) ¿Cuántos habitantes habrá en el año 2010?
- b) ¿Cuándo habrá más de 50 millones de habitantes?
- c) ¿Cuándo se duplicará el número de habitantes del año 2004?

Ejercicio 18.- La función de demanda de un producto viene dada por $p = D(x) = 250e^{-x+1}$.
¿Qué cantidad se espera vender para un precio de \$50 la unidad?

Ejercicio 19.- La función de demanda para un producto es $p = D(x) = 4e^{2-0,1x}$.

a) Graficar aproximadamente esta función.

b) Expresar x en función de p .

EJERCICIOS SURTIDOS

Ejercicio 1.- Escribir los siguientes conjuntos como intervalo o unión de intervalos y hallar, si existen, supremo e ínfimo de los mismos.

$$A = \{x \in \mathbb{R} / \frac{4}{x} < x - 3\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{x} > x + 1 - \frac{5}{x}\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 6 \leq x + 6\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{x} < |x + 2|\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x+1} \geq |x|\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{R} / |3x + 1| \geq |x - 2|\}$$

$$G = \{x \in \mathbb{R} / \ln(2x - 3) > 0\}$$

$$H = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x-2} < 4\}$$

$$I = \{x \in \mathbb{R} / \frac{3x-1}{x+1} < 3\}$$

$$J = \{x \in \mathbb{R} / f^{-1}(x) < 6\}, \text{ donde } f(x) = \sqrt{2x+4}$$

Ejercicio 2.- Un capital de \$10 000 se invierte a interés compuesto anual (con capitalización anual) del 6%. ¿Cuánto tardará en obtenerse un monto de \$15 000?

Ejercicio 3.- El conjunto de positividad de una función cuadrática es el intervalo $(1, 3)$, ¿cuáles son sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento?

Ejercicio 4.- Graficar la función $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } -3 \leq x \leq 5 \\ 2x - 5 & \text{si } x < -3 \text{ ó } x > 5 \end{cases}$

Hallar, si existen, el supremo y el ínfimo de $\{x \in \mathbb{R} / f(x) \leq 2\}$.

Ejercicio 5.- La función de demanda de un producto está dada por $p = D(q) = \frac{a}{q}$, y la función de oferta por $p = O(q) = 3q - 60$ (p indica precio y q cantidad de unidades). Determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ sabiendo que el precio de equilibrio es \$15.

Ejercicio 6.- Hallar el valor de $a \in \mathbb{R}$ si se sabe que $\sup A = 7$, donde $A = \{x \in \mathbb{R} / |2x + 1| \leq a\}$

Ejercicio 7.- En cada uno de los problemas siguientes, marcar la única afirmación correcta

a) La ecuación de oferta de cierto producto es $p = O(q) = 8e^{3q} + 50$. Entonces la cantidad ofertada q en función del precio p es

- ☐ $\frac{1}{3} \ln\left(\frac{p-50}{8}\right)$
☐ $3 \frac{\ln(p) - 50}{8}$
☐ $\frac{\ln(p) - \ln(50)}{8}$
☐ $3e^{\frac{p-50}{8}}$

b) La curva de oferta es $p = O(q) = q + 1$ y la de demanda es $p = D(q) = \frac{400}{q+1}$ (q = número de unidades, p = precio). Entonces el mercado está en equilibrio cuando

- ☐ $q = 19$ y $p = 20$
☐ $q = 21$ y $p = 22$
☐ $q = 20$ y $p = 21$
☐ $q = 399$ y $p = 400$

c) La función $f(x) = \ln(5x - 9)$ es positiva para x en el intervalo

- ☐ $(1, 2)$
☐ $(3, 5)$
☐ $(0, +\infty)$
☐ $(-1, 0)$

d) El dominio natural de $f(x) = \ln(2x - 4)$ es

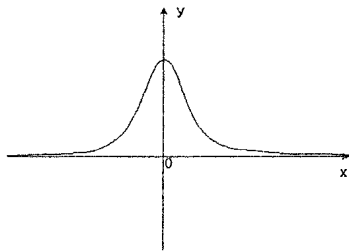
- ☐ $(2, +\infty)$
☐ $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$
☐ $(0, +\infty)$
☐ $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

e) El vértice de la parábola de ecuación $y = (x - 2)^2 + 5$ es el punto

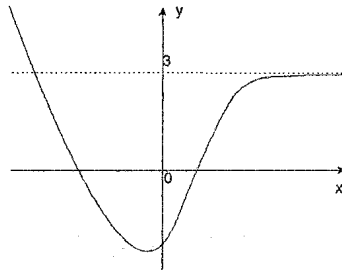
- ☐ $(2, 5)$
☐ $(2, -5)$
☐ $(-2, -5)$
☐ $(-2, 5)$

PRACTICA 4 LIMITES Y CONTINUIDAD

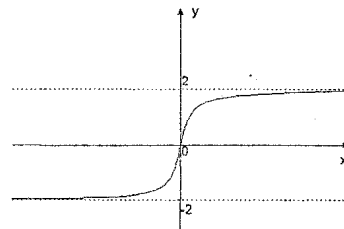
Ejercicio 1.- A partir de los siguientes gráficos determinar, si existen, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$



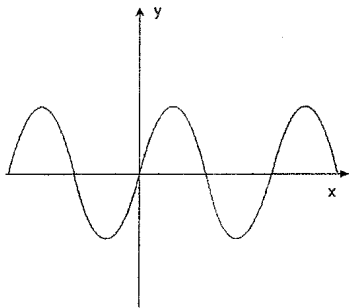
a)



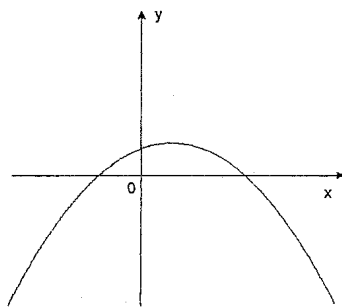
b)



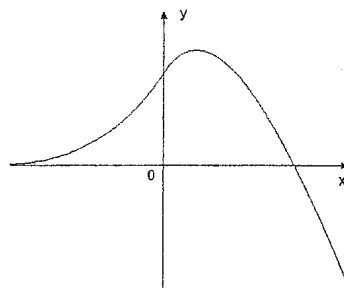
c)



d)



e)



f)

Ejercicio 2.- Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10000}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{5}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+5}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{2x+1}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+3}{2x-1}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x-1} + 5$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2}{x^2-5}$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+x+2}{2x^2+11}$

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+x+2}{1000x}$

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{3x^2+x+2}$

l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1000x^2}{x^2+1}$

m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)(2x-1)}{x^2+1}$

n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+3x+1}{2x^4+2x^3+1}$

o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{x^2+5x} - \frac{3x-1}{2x+3}$

Práctica 4

Ejercicio 3.- Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^7 - 10x^5 + 3)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^7 - 10x^5 + 3)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x - 4x^3 - 1}{5x^2 + 4}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3x - 4x^3 - 1}{5x^2 + 4}$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x+3)(x^2-2x+5)}{x^3-1}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^2 + 2x - 1}{x^3 + 3x - 6}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 7}{x + 3} + \frac{x^2 + 5}{x + 1}$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{3x^2 + x + 2}$

Ejercicio 4.- Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3} + 2}{x^2 - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \sqrt{x}}{1 + 4\sqrt{x}}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{3x^2 - 2}}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x^2+5}}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{4x^2 - 1}}{5x + 3}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{4x^3 - 1}}{5x + 3}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x}$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{9x^2 + 6}}{5x - 1}$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 2} - 4}{\sqrt[3]{8x^3 + 2} + 5}$

Ejercicio 5.- Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - x^6 + \sqrt{x})$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x - 2} + x)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x - 2} - x)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - x}{x + 5}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x + 3})$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(x+4)(x+10)} - x)$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1} - 3}{2^x + 5}$

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{x+1} - 3}{2^x + 5}$

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 3}{\left(\frac{1}{2}\right)^x + 5}$

k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{5x+1}\right)^{2x}$

l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x}$

Práctica 4

Ejercicio 6.- Teniendo en cuenta que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ calcular

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x, a \in \mathbb{R}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x+2}\right)^{2x+3}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+6}\right)^{3x+1}$

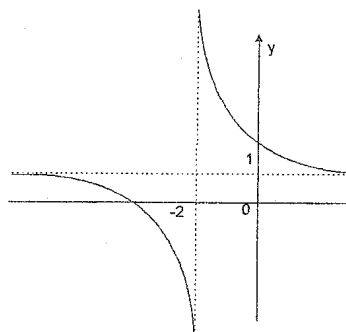
d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x+1}\right)^{3-5x^3}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+4}{x^2+6}\right)^{2x+3}$

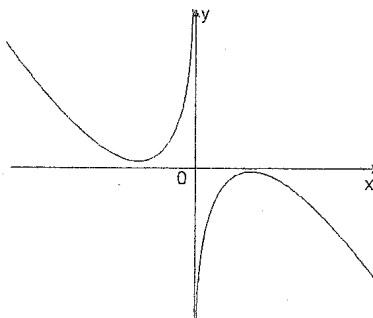
f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x+2}\right)^{x^2}$

Ejercicio 7.- Dados los siguientes gráficos, determinar los límites que se indican en cada caso.

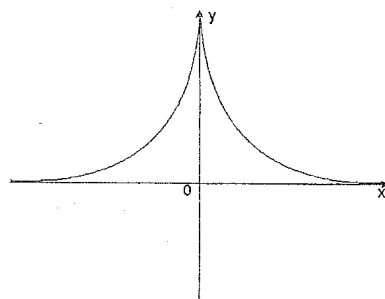
a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$



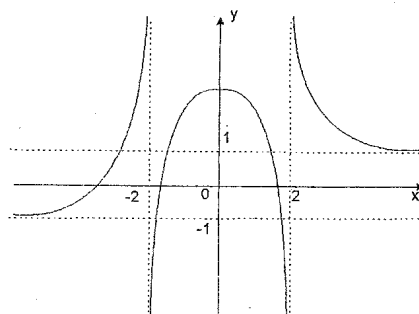
b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$



c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$



d) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$



Ejercicio 8.- Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 - 2}{x^4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2}{2x^3 + 3x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sqrt{4x}}{x^2 + x + \sqrt{9x}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x - 8}$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{4x - 12}$

f) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 2x - 4}{5x + 10}$

g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 2} - \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 2x}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{\sqrt{x+16} - 4}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}$

j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt{3+x}}{x-1}$

k) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x - \sqrt{3x+10}}$

l) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x+2}{4x+3} \right)^{x-1}$

Ejercicio 9.- Hallar el valor de a para que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + ax + 1} - 1}{x} = 2$.

Ejercicio 10.- Teniendo en cuenta que $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ calcular

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{2/x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{1/x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x+2}{3x+2} \right)^{1/x^3}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+2x)^{1/x^2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{5/x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3+5x}{3+4x} \right)^{2/x}$

g) $\lim_{x \rightarrow -1} (2+x)^{3/x+1}$

Ejercicio 11.- Localizar las asíntotas de las siguientes funciones y situar la gráfica respecto de ellas.

a) $f(x) = \frac{2x+3}{x-5}$

b) $f(x) = \frac{8x-4}{2x+6}$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - 1}$

d) $f(x) = \frac{2x^2 + 4x - 6}{x^2 - x - 6}$

e) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{(x+1)(x-2)} + 5$

f) $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{4x^2 - 36}$

g) $f(x) = \frac{1}{|x+1|}$

h) $f(x) = e^{x-3}$

i) $f(x) = e^{1/x}$

j) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$ k) $f(x) = \ln(1 - x)$ j) $f(x) = \ln(4x - 7)$

Ejercicio 12.- Hallar el dominio, las ecuaciones de las asíntotas y hacer un gráfico aproximado de las siguientes funciones

$$f_1(x) = \frac{1}{x-1} \quad f_2(x) = \frac{-3}{x+2} \quad f_3(x) = \frac{x+3}{x-2} \quad f_4(x) = \frac{4x+5}{x+3}$$

Ejercicio 13.- Comprobar las siguientes identidades sabiendo que, en todos los casos, a es un número real fijo.

a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 - a}{h} = 2a$

b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

Ejercicio 14.- La función de demanda de un producto viene dada por la fórmula $p = f(q) = \frac{1000}{q+5}$. Calcular a cuánto tiende el ingreso ($= pq$) cuando la producción crece a más infinito.

Ejercicio 15.- Hallar las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales de las funciones

a) $f(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 2}$

b) $f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - \sqrt{2x+8}}$

Definición:

Se dice que una función f es continua en el punto de abscisa $x = a$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

En caso contrario se dice que $x = a$ es un punto de discontinuidad de la función f .

Práctica 4

Ejercicio 16.- Determinar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones. Decidir en cada caso si es posible redefinir la función en dichos puntos para que resulte continua.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq 1 \\ 2 & \text{si } x < 1 \end{cases} & \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 6 & \text{si } x = 2 \\ x+2 & \text{si } x > 2 \end{cases} \\ \\ \text{c) } f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 2x+3 & \text{si } x > 0 \end{cases} & \text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x}-2}{-2x+4} & \text{si } x > 2 \\ \frac{3}{8}x-1 & \text{si } x \leq 2 \end{cases} \end{array}$$

Ejercicio 17.- Hallar el dominio y determinar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones, decidiendo en cada caso si es posible redefinir la función en dichos puntos para que resulte continua.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} & \text{b) } f(x) = \frac{3-\sqrt{x+1}}{x-8} \\ \\ \text{c) } f(x) = \frac{x^2-9}{(x-3)^2} & \text{d) } f(x) = \frac{3-\sqrt{x+4}}{5-x} \end{array}$$

Ejercicio 18.- Dadas las siguientes funciones hallar, en cada caso, el valor de a para que f resulte continua en el punto indicado

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \begin{cases} 2x^2-4x+3 & \text{si } x < 1 \\ a-5x & \text{si } x \geq 1 \end{cases} & \text{en } x = 1 \\ \\ \text{b) } f(x) = \begin{cases} 2^{1/x} + a & \text{si } x < 0 \\ -x+3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} & \text{en } x = 0 \\ \\ \text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+3x-2}{x+2} & \text{si } x > -2 \\ x^2+ax+5 & \text{si } x \leq -2 \end{cases} & \text{en } x = -2 \end{array}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{\ln(1+6x)}{x}} & \text{si } x > 0 \\ a + 3(x+1) & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0$$

Ejercicio 19.- Hallar $k \in \mathbb{R}$ para que la función resulte continua

$$a) f(x) = \begin{cases} \ln(x-3) + k & \text{si } x > 4 \\ 2 + k(x+1) & \text{si } x \leq 4 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} kx - 4 & \text{si } x > 1 \\ 2 - k^2x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Teorema de Bolzano

Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y además $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Consecuencias

1. Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y no tiene ningún cero en el intervalo (a, b) , entonces f no cambia de signo en dicho intervalo.
2. Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y α y β (con $a < \alpha < \beta < b$) son dos ceros consecutivos de f , entonces (α, β) es o bien un intervalo de positividad, o bien un intervalo de negatividad de f .

Ejercicio 20.- Sea $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Probar que

- a) f tiene un cero en el intervalo $(1, 2)$.
- b) f tiene un cero en el intervalo $(1, 5; 1, 6)$.
- c) f tiene un cero en el intervalo $(1, 53; 1, 54)$.

Ejercicio 21.- Hallar los ceros de la función f y determinar los intervalos de positividad y de negatividad

- a) $f(x) = (3x - 2)(4x + 1)(x - 5)$
- b) $f(x) = x(2x + \sqrt{2})(3x - \frac{1}{4})$
- c) $f(x) = 3(x - 2)(x^2 - 10x + 22)$
- d) $f(x) = (x^2 - 5)(x^2 + 2x + 1)$

e) $f(x) = \left(x^3 - \frac{9}{4}x\right)(-x^2 - x + 2)$

f) $f(x) = e^{x-3}$

g) $f(x) = x^3 - 8$

h) $f(x) = x^4 - 16$

i) $f(x) = x^6 - 3x^3 + 2$

j) $f(x) = e^{5x} - e^{3x}$

k) $f(x) = \ln(2x + 5)$

l) $f(x) = 1 - e^{x-2}$

Ejercicio 22.-

a) Hallar los intervalos de positividad y de negatividad de un polinomio P cuyos únicos ceros son 1 y -1 , si se sabe que $P(-2) = 2$, $P(0) = -1$, $P(2) = 3$.

b) Sea f una función polinómica tal que $f(6) = 8$, $f(2) = -2$, $f(4) = 3$, $f(0) = 1$ y sus únicas raíces son 1, 3, y 5. Hallar los intervalos de positividad y de negatividad de f .

Ejercicio 23.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua que corta al eje x en tres puntos (únicamente) y de la cual se conoce la siguiente tabla de valores

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-5	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	-1	-3	$-\frac{3}{2}$	2

a) Para cada uno de los ceros de f , hallar un intervalo de amplitud 1 que lo contenga.

b) Determinar, si es posible, el signo de f en cada uno de los siguientes intervalos $(-2, -1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(-\infty, -2)$, $(2, +\infty)$, $(-\infty, -1)$.

c) Hacer un gráfico aproximado de f usando los datos obtenidos en a) y b).

EJERCICIOS SURTIDOS

Ejercicio 1.- Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{(x-2)(x+5)} - x$

Ejercicio 2.- Se sabe que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{f(x)} = 0$. ¿Cuál es el $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$?

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^x$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} (3-x)^{3/x-2}$

Ejercicio 4.- Hallar el dominio y las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes funciones

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} + 5}{x+1}$

b) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$

c) $f(x) = \ln\left(3 - \frac{1}{x}\right)$

d) $f(x) = 1 + 2e^{1/x}$

Ejercicio 5.- Hallar el valor de $k \in \mathbb{R}$ de modo que $x = -\frac{1}{4}$ sea asíntota de la función $f(x) = \frac{4x-5}{kx+3}$. Para el valor de k obtenido hallar las ecuaciones de todas las asíntotas de f justificando con los cálculos correspondientes.

Ejercicio 6.- De una función cuadrática $P(x)$ se sabe que $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = -\infty$ y que -2 y 5 son los ceros de $P(x)$. Hallar el conjunto de negatividad de $P(x)$.

Ejercicio 7.- Hallar el valor de α , sabiendo que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{\alpha x} = \sqrt{e}$.

Ejercicio 8.- Calcular

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(3x^2+1) - 2\ln(x-5)$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x^2-1) - \ln(x^2+4x-5)$

Ejercicio 9.- En cada problema, marcar la única opción correcta

a) El $\lim_{x \rightarrow 0} 2\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$ es igual a

☐ 2

☐ 12

☐ 1

☐ $\frac{1}{3}$

Práctica 4

b) El $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{6x}$ es igual a

- ☐ -1 ☐ e^{12} ☐ e^3 ☐ e^6

c) Las ecuaciones de todas las asíntotas de $f(x) = \frac{2x^2 + 6x + 4}{(x-3)(x+1)}$ son

- ☐ $x = 3, x = -1, y = 2$ ☐ $x = -1, y = 0$ ☐ $x = 3, y = 2$ ☐ $x = 3, y = -1$

d) La función $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{5x - 1}$ es positiva en el intervalo

- ☐ $(-2, +\infty)$ ☐ $(5, 7)$ ☐ $(-\infty, -3)$ ☐ $(-3, 1)$

e) El conjunto de negatividad de $f(x) = \ln(x^2 - 3)$ es

- ☐ $(-2, 2)$ ☐ $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ☐ $(0, 1)$ ☐ $(-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2)$

f) f es una función polinómica de grado 3, $f(5) = -1$, $f(3) = 2$, $f(7) = 5$, $f(-4) = -6$. Entonces puede afirmarse que no hay un cero en el intervalo

- ☐ $(-6, -4)$ ☐ $(-4, 7)$ ☐ $(0, 10)$ ☐ $(4, +\infty)$

PRACTICA 5 DERIVADAS

Definición:

Si f es una función y x un punto de su dominio se define la *derivada de f en x* como

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

cuando este límite existe.

Ejercicio 1.- Usando la definición comprobar las siguientes fórmulas de derivación

a) $(mx + b)' = m$

b) $(ax^2)' = 2ax$

c) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

e) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

f) $(e^x)' = e^x$

Ejercicio 2.- Calcular la derivada de las siguientes funciones

a) $f_1(x) = 2x + 5$

$f_2(x) = -3x + 1$

$f_3(x) = x^2 + 5x + 2$

$f_4(x) = 3x^2 - 2x$

$f_5(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

$f_6(x) = 4\sqrt{x} - 3\frac{1}{x}$

b) $f_1(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5x + 2$

$f_2(x) = x^5 + \frac{1}{7}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + x - 1$

$f_3(x) = 4x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{3}{4}}$

$f_4(x) = \sqrt[3]{x^2} + 2\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$

$f_5(x) = 2x^{-1} + 4x^{-3}$

$f_6(x) = 7\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^4}$

c) $f_1(x) = (2x + 3)(x^2 - 4x)$

$f_2(x) = (4x^2 + 2x - 3)(x^2 - 5x + 2)$

Práctica 5

$$f_3(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{3}{x}\right)(4\sqrt[3]{x} + 6x^2) \quad f_4(x) = (3x-1)(\sqrt{x}+2)\left(\frac{5}{x} + x^4\right)$$

$$f_5(x) = (x^2 - 3x)(2e^x + 1) \quad f_6(x) = (5x+2)\left(4\ln x + \frac{3}{x}\right)$$

$$f_7(x) = 2\left(x^3 - \frac{5}{\sqrt{x}}\right) + x^3\sqrt{x} \quad f_8(x) = 3e^x + 2\ln x$$

$$f_9(x) = 4e^x - 2x^3 \quad f_{10}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} - 2\ln x$$

$$d) \quad f_1(x) = \frac{x^2 + 5x}{x^3 - 4x} \quad f_2(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$$

$$f_3(x) = \frac{3x-1}{4x+2} \quad f_4(x) = \frac{-x^4 + \sqrt{x}}{2x^2 + 1}$$

$$f_5(x) = \frac{x + \ln x}{2xe^x + 1} \quad f_6(x) = \frac{2x^3 + x^2}{x - 3\ln x}e^x$$

$$f_7(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+e^x} + \frac{3}{x}(\ln x + 2e^x) \quad f_8(x) = \frac{\sqrt[3]{x} \ln x}{1 + \frac{e^x}{x^2 + 4}}$$

Ejercicio 3.- Calcular la derivada de las siguientes funciones

$$f_1(x) = (2x+1)^5 \quad f_2(x) = (x-3x^2)^{100} \quad f_3(x) = \sqrt{x^2+4x+1}$$

$$f_4(x) = (x^2+2x+2)^{-3} \quad f_5(x) = \frac{1}{x^2-1} \quad f_6(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+x}}$$

$$f_7(x) = e^{-7x} \quad f_8(x) = e^{x^2+3x} \quad f_9(x) = e^{\frac{2}{x}+3x}$$

$$f_{10}(x) = e^{\sqrt{2x+1}} \quad f_{11}(x) = \ln(x^4+2x) \quad f_{12}(x) = \ln^3(2x-1)$$

$$f_{13}(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad f_{14}(x) = \ln(x^2+1)^3 \quad f_{15}(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4x+9}}$$

$$f_{16}(x) = e^{2x} + 3e^{-5x} \quad f_{17}(x) = x^2e^{3x-1} \quad f_{18}(x) = x^2e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}$$

$$f_{19}(x) = \frac{\ln x}{x} \quad f_{20}(x) = (x-2)\ln(2x-4)$$

Ejercicio 4.- Calcular la derivada de

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (5x+1)^{2x+3} & f_2(x) &= x^{x^2+4x} & f_3(x) &= x^{3x} \\ f_4(x) &= x^{e^{-x^2}} & f_5(x) &= \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x & f_6(x) &= (\ln x)^x \\ f_7(x) &= x^{\ln x} & f_8(x) &= (3x^2 - x)^{\sqrt{2x+4}} & f_9(x) &= 5^{2x} \end{aligned}$$

Ejercicio 5.- Para las siguientes funciones hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto de abscisa $x = x_0$

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= -3x^2 + x + 2, x_0 = 1 & \text{b) } f(x) &= 4x + 1, x_0 = 2 \\ \text{c) } f(x) &= \frac{\sqrt{3x+4}}{x}, x_0 = 4 & \text{d) } f(x) &= (x-5)e^{x^2-9}, x_0 = 3 \\ \text{e) } f(x) &= \ln(3x+7), x_0 = -2 & \text{f) } f(x) &= (x+2)^{2x}, x_0 = -1 \end{aligned}$$

Ejercicio 6.- Sea $f(x) = \ln(bx^2 + 2)$. Hallar el valor de b para que la recta tangente al gráfico de f en el punto de abscisa $x = 1$ tenga pendiente igual a $\frac{1}{2}$.

Ejercicio 7.- Dada $f(x) = \ln(x^2 - 60)$, hallar todos los x_0 pertenecientes al dominio de f tales que la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en $(x_0, f(x_0))$ es igual a 4.

Ejercicio 8.- Trazar el gráfico de una función continua $f: (0, 10) \rightarrow \mathbb{R}$ que se ajuste a los datos de la siguiente tabla

x	2	4	6	8
$f(x)$	1	5	2	-1
$f'(x)$	3	0	-2	1

Aplicaciones: Función de Costo Marginal

En Economía la palabra "marginal" se utiliza para indicar derivada. Por ejemplo, si $C(x)$ es la función de costo, el *costo marginal* es $C'(x)$.

Ejercicio 9.- Una empresa calcula que el costo de producción de x unidades de cierto artículo de consumo está dado por $C(x) = 200 + 0,05x + 0,001x^2$.

a) Hallar el costo y el costo marginal por producir

- i) 500 unidades ii) 1000 unidades iii) 5000 unidades

b) Comparar con los costos por producir una unidad más en cada uno de los casos anteriores.

Ejercicio 10.- Una empresa encuentra que el costo por producir x litros de un cierto producto químico está dado por $C(x) = 3 + x + \frac{10}{x}$. Comparar el costo marginal al producir diez litros con el costo de producir el undécimo litro.

Ejercicio 11.- La demanda de x unidades de cierto artículo de consumo viene dada por $p(x) = \sqrt{12000 - 2x}$. Hallar las funciones de demanda marginal, ingreso total e ingreso marginal.

Ejercicio 12.- Para las funciones de ingreso total que se dan a continuación hallar el ingreso marginal, la demanda y la demanda marginal

a) $R(x) = 2x\sqrt{400 - x}$ b) $R(x) = 300x - 2x^{\frac{3}{2}}$

Ejercicio 13.- Una empresa calcula que para vender x unidades de cierta mercancía el precio por unidad debe ser $p(x) = 1800 - 2x$, donde $1 \leq x \leq 100$. Suponiendo que el costo de fabricación de x unidades es $C(x) = 1000 + x + 0,01x^2$, hallar

a) La función de ingreso total y de ingreso marginal.

b) La función de ganancia y de ganancia marginal.

Ejercicio 14.- La función de demanda de un producto es $p(x) = \frac{1000}{x+5}$.

a) Hallar la función de ingreso marginal y evaluarla en $x = 45$.

b) ¿Cuál es el ingreso adicional por vender una unidad por encima de 45 unidades?

Ejercicio 15.- Las siguientes funciones representan la función de demanda para cierto producto, donde p denota el precio por unidad y x las unidades. Encontrar en cada caso la función de ingreso marginal.

$$i) p(x) = \frac{108}{x+2} - 3 \quad ii) p(x) = \frac{x+750}{x+50}$$

Ejercicio 16.- Un fabricante determina que n trabajadores fabricarían un total de x unidades de un producto por día, donde $x(n) = \frac{10n^2}{\sqrt{n^2+19}}$. Si la ecuación de demanda para el producto es $p(x) = \frac{900}{x+9}$, determinar el ingreso marginal cuando $n = 9$.

Ejercicio 17.- Cuando una empresa vendía cierta mercancía a 50 pesos por unidad, había una demanda de 1 000 unidades a la semana. Después que el precio aumentó a 70 pesos, la demanda disminuyó a 800 unidades por semana. Suponiendo que la función de demanda p es lineal, encontrar la función de ingreso marginal.

Aplicaciones: Elasticidad de la Demanda

Si $p = D(q)$ es la función de demanda de un producto, se define el coeficiente de elasticidad η como $\eta = \frac{D(q)}{qD'(q)}$.

Se dice que la demanda es

- i) *elástica*, si $\eta < -1$
- ii) *unitaria*, si $\eta = -1$
- iii) *inelástica*, si $-1 < \eta < 0$

Ejercicio 18.- Calcular la elasticidad de la demanda en los valores indicados, y determinar si la misma es elástica, unitaria, o inelástica.

a) $p = D(x) = -100x + 5000$, $x = 10$

b) $p = D(x) = \frac{1000}{x^2}$, $x = 13$

c) $p = D(x) = 150e^{-x/100}$, $x = 100$

Ejercicio 19.- La función de demanda para el producto de un fabricante es

$$p = \frac{200}{\sqrt{6000 + 10x^2}}.$$

- Calcular la elasticidad de la demanda cuando se producen 20 unidades.
- Decidir si la misma es elástica, inelástica o unitaria.

EJERCICIOS SURTIDOS

Ejercicio 1.- Hallar los valores de a y b para que $y = 2x$ sea la recta tangente al gráfico de $f(x) = x^2 + ax + b$ en el punto $(2, 4)$.

Ejercicio 2.- Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f(x)$ en el punto de abscisa x_0 , para

- $f(x) = \ln(6x - 6)$, en $x_0 = 3$
- $f(x) = 6e^{2\sqrt{x}-6} + x^2 - 2$, en $x_0 = 9$

Ejercicio 3.- Hallar para qué valores de x_0 la recta de ecuación $y = 5x + 12$ es tangente al gráfico de $f(x) = x^3 - 7x - 4$ en el punto de abscisa $x = x_0$.

Ejercicio 4.- Las siguientes funciones son funciones de costo de un producto. Hallar la función de costo marginal y el costo marginal para los valores dados de x_0 .

- $C(x) = 7000e^{\frac{x}{700}}$, $x_0 = 350$; $x_0 = 700$
- $C(x) = 850 + 4000e^{\frac{2x+6}{800}}$, $x_0 = 97$; $x_0 = 197$

Ejercicio 5.- La función de demanda de cierto producto es $p = D(x) = \frac{1}{\sqrt{3x + 100}}$. Calcular el coeficiente de elasticidad para $x = 100$, y decidir si para este valor la demanda es elástica, inelástica o unitaria.

Ejercicio 6.- Si $R(q) = 5q\sqrt{2500 - 4q}$ es la función de ingreso total cuando hay una demanda de q unidades de cierto producto, hallar la función de ingreso marginal.

Ejercicio 7.- La función de oferta de cierto producto es $p = O(x) = \frac{x^2}{\sqrt{3x^2 + 4}}$. Hallar la función de oferta marginal.

Ejercicio 8.- La función de demanda de cierto artículo viene dada por $p = D(q) = 100 - 0,4q$ donde p es el precio por unidad y q la cantidad demandada. Hallar q para que el ingreso marginal sea igual a 20.

Ejercicio 9.- Marcar la única opción correcta.

a) Si $f(x) = 3x + 5$ y $g(x) = \frac{1}{x+2}$, entonces $(g \circ f)'(x)$ vale

- ☐ $\frac{3}{3x+5}$
☐ $\frac{3}{3x+7}$
☐ $\frac{-3}{(3x+7)^2}$
☐ $3 \ln(3x+7)$

b) El coeficiente de elasticidad de la demanda D_1 es $\eta_1 = -5$ y el coeficiente de elasticidad de la demanda D_2 es $\eta_2 = -0,3$. Entonces

- ☐ D_1 es elástica y D_2 es elástica
 ☐ D_1 es elástica y D_2 es inelástica
☐ D_1 es inelástica y D_2 es elástica
 ☐ D_1 es inelástica y D_2 es inelástica

c) Si $f(x) = a + (2 + bx)^2$; $f(0) = 5$ y $f'(0) = \frac{1}{2}$ entonces

- ☐ $a = 1, b = \frac{1}{8}$
☐ $a = 3, b = \frac{1}{4}$
☐ $a = 3, b = \frac{1}{8}$
☐ $a = 1, b = \frac{1}{4}$

d) La derivada de $f(x) = x^{-x}$ es $f'(x) =$

- ☐ $x^{-x}(1 + \ln x)$
☐ $-xx^{x-1}$
☐ $-x^{-x}(1 + \ln x)$
☐ x^{-x}

e) La pendiente de la recta tangente al gráfico de $f(x) = \ln(x^2 + 4)$ en el punto de abscisa $x = 4$ es igual a

- ☐ $\frac{2}{3}$
☐ $\frac{1}{12}$
☐ $\frac{1}{8}$
☐ 0

PRACTICA 6 ESTUDIO DE FUNCIONES

Consecuencias del Teorema del Valor Medio (TVM)

Teorema

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en el abierto (a, b) y $f'(x) > 0$ en todo el abierto (a, b) , entonces f es *creciente* sobre todo el cerrado $[a, b]$.

Teorema

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en el abierto (a, b) y $f'(x) < 0$ en todo el abierto (a, b) , entonces f es *decreciente* sobre todo el cerrado $[a, b]$.

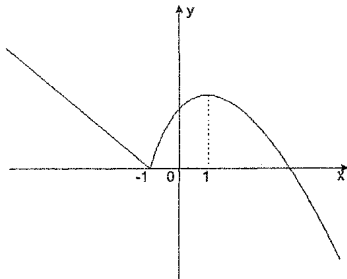
Teorema

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en el abierto (a, b) y $f'(x) = 0$ en todo el abierto (a, b) , entonces f es *constante* sobre todo el cerrado $[a, b]$.

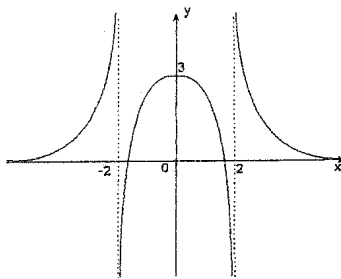
Ejercicio 1.- Dados los siguientes gráficos de funciones determinar

- a) En qué puntos no existe la derivada de f .
- b) El conjunto $\{x \in \mathbb{R} / f'(x) > 0\}$
- c) El conjunto $\{x \in \mathbb{R} / f'(x) < 0\}$
- d) El conjunto $\{x \in \mathbb{R} / f'(x) = 0\}$
- e) Los máximos y mínimos de f .

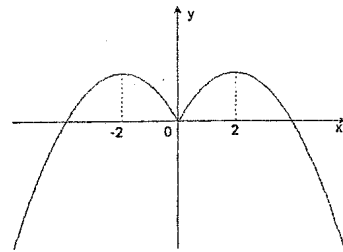
i)



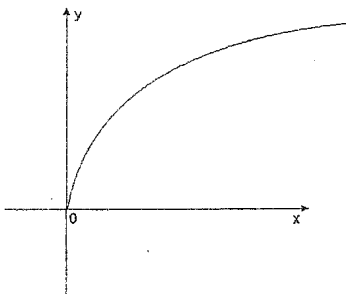
ii)



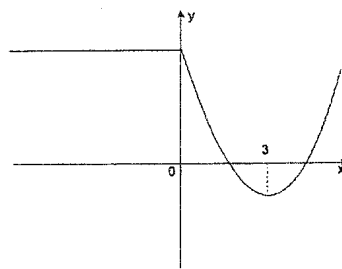
iii)



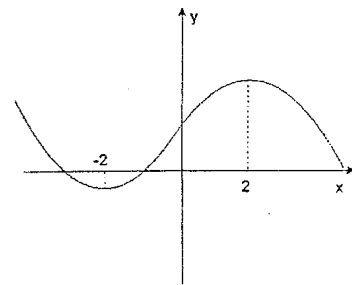
iv)



v)



vi)



Ejercicio 2.- Para las siguientes funciones, hallar los intervalos de crecimiento, de decrecimiento, los máximos y mínimos relativos y hacer un gráfico aproximado

$$f_1(x) = 2x + 3$$

$$f_2(x) = -5x + 2$$

$$f_3(x) = x^2 - 4x$$

$$f_4(x) = x^2 + 3x + 2$$

$$f_5(x) = x^3 + 3x^2 - 1$$

$$f_6(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

$$f_7(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 8$$

$$f_8(x) = 2x^6 - 27x^4$$

$$f_9(x) = 6x^3(x-1)^2$$

Ejercicio 3.- En cada uno de los siguientes casos, hallar el dominio de f , los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los extremos locales. Hacer un gráfico aproximado de f .

$$f_1(x) = xe^{-x}$$

$$f_2(x) = 2xe^{5x}$$

$$f_3(x) = x^2e^{-2x}$$

$$f_4(x) = 3xe^{x^2}$$

$$f_5(x) = x \ln x$$

$$f_6(x) = \frac{x}{\ln x}$$

$$f_7(x) = x^2 \ln(3x)$$

$$f_8(x) = x \ln(x^2)$$

$$f_9(x) = (x+2) \ln(2x+4)$$

Ejercicio 4.- En cada uno de los siguientes casos, hallar el dominio de f , los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los extremos locales y las asíntotas verticales y horizontales. Con los datos obtenidos hacer un gráfico aproximado de f .

$$f_1(x) = x^3 + \frac{48}{x}$$

$$f_2(x) = 3x + 1 - \frac{4}{(-3x+1)^2}$$

$$f_3(x) = x^{\frac{2}{3}}(x^2 - 8)$$

$$f_4(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+5}}$$

$$f_5(x) = e^{-x^2}$$

$$f_6(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

$$f_7(x) = \frac{1-x^2}{x^2-4}$$

$$f_8(x) = \ln(3x+4)$$

$$f_9(x) = \ln(x^2 - 9)$$

Ejercicio 5.- Trazar el gráfico de una función f que satisfaga simultáneamente las siguientes condiciones y decir para qué puntos f alcanza extremos relativos y decidir si son máximos o mínimos.

a)

- 1) $f'(x) > 0$ en $(3, 8)$.
- 2) $f'(x) < 0$ en $(-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (8, +\infty)$.
- 3) $f'(3) = f'(8) = 0$.
- 4) f tiene una asíntota vertical en $x = 1$.
- 5) La recta $y = -4$ es asíntota horizontal en $+\infty$.
- 6) La recta $y = 2$ es asíntota horizontal en $-\infty$.

b)

- 1) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
- 2) $f'(x) > 0$ en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$.
- 3) $f'(x) < 0$ en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$.
- 4) $f'(x) = 0$ en $x = -2$ y en $x = 2$.
- 5) f tiene una asíntota vertical en $x = 0$.
- 6) f no tiene asíntotas horizontales.

Ejercicio 6.- Probar que la ecuación

- a) $1 - 2x^3 - \ln(3x + 1) = 0$, ($x \geq 0$) tiene exactamente una solución positiva.
- b) $-3e^{-4x^2} + 2 = 0$ tiene exactamente dos raíces en el intervalo $[-1, 1]$.

Ejercicio 7.- Estudiar la función dada en el intervalo indicado: Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos y absolutos

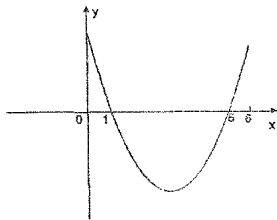
- a) $f(x) = -x^2 + 6x$ en $[1, 4]$
- b) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ en $[-1, 8]$

c) $f(x) = x^{\frac{5}{3}}(x^2 - 1)$ en $[-1, 1]$

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$ en $[-3, 2]$

e) $f(x) = \begin{cases} 4x + 12 & , -5 \leq x \leq -2 \\ x^2 & , -2 < x \leq 1 \end{cases}$ en $[-5, 1]$

Ejercicio 8.- Sea $f: [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable tal que el gráfico de su derivada $f'(x)$ es el que se muestra



- Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
- Ubicar los máximos y mínimos locales de f .

Ejercicio 9.- Una empresa calcula que para vender x unidades de cierta mercancía el precio por unidad debe ser $p(x) = 1800 - 2x$ donde $1 \leq x \leq 100$. Suponiendo que el costo de fabricación de x unidades es $C(x) = 100 + x + 0,01x^2$, hallar

- La función de ingreso total.
- La función de ganancia.
- El número de unidades para el cual la ganancia es máxima.
- La ganancia máxima.

Ejercicio 10.- La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es $p(x) = 400 - 2x$ y la función de costo es $C(x) = 0,2x^2 + 4x + 400$, donde x es el número de unidades.

- Determinar el nivel de producción en el que se maximizan las ganancias.

- b) Determinar el precio en el que ocurren las ganancias máximas.
- c) Determinar las ganancias máximas.
- d) Si el gobierno fija un impuesto de \$22 por unidad, ¿cuál es el nuevo precio para la maximización de las ganancias?
- e) Si el gobierno impone una cuota por licencia de \$100 al fabricante, como un gravamen fijo independiente de cuál sea la producción, demostrar que el precio y la producción que maximizan las ganancias no varían. Verificar que las ganancias disminuirán.

Ejercicio 11.- Un fabricante planea colocar un cerco en un área rectangular de almacenamiento de $10800m^2$ adyacente a un edificio, utilizando a éste como uno de los lados del área que se debe cercar. La reja que corre paralela al edificio queda frente a una carretera y costará \$3 por cada metro instalado, en tanto que la reja para los otros dos lados cuesta \$2 por metro instalado.

- a) Encontrar la cantidad de cada tipo de reja para que los costos totales sean mínimos.
- b) ¿Cuál es el costo mínimo?

Ejercicio 12.- Para las siguientes funciones, hallar los intervalos de concavidad, de convexidad y los puntos de inflexión

$$f_1(x) = 2x + 3$$

$$f_2(x) = x^2 - 4x$$

$$f_3(x) = -x^2 + 4x$$

$$f_4(x) = x^3 - 6x^2 + 4x - 1$$

$$f_5(x) = x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 23x + 6$$

$$f_6(x) = \sqrt[3]{x^5}$$

$$f_7(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$f_8(x) = xe^{2x}$$

$$f_9(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

Ejercicio 13.- Trazar el gráfico de una función continua f que satisfaga simultáneamente las siguientes condiciones

- a)
 - 1) $f(-2) = 2$
 - 2) $f'(-2) = 1$
 - 3) $\{x \in \mathbb{R} / f'(x) > 0\} = \mathbb{R}$
 - 4) $\{x \in \mathbb{R} / f''(x) < 0\} = (-\infty, -2)$
 - 5) $\{x \in \mathbb{R} / f''(x) > 0\} = (-2, +\infty)$

$$2) \{x \in \mathbb{R} / f'(x) < 0\} = (-\infty, 3)$$

$$3) \{x \in \mathbb{R} / f'(x) > 0\} = (3, +\infty)$$

$$4) \{x \in \mathbb{R} / f''(x) < 0\} = \mathbb{R} - \{3\}$$

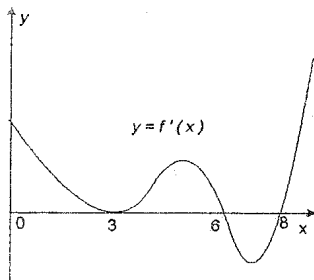
EJERCICIOS SURTIDOS

Ejercicio 1.- Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que el valor mínimo de la función $f(x) = x^2 + 2x + a$ sea igual a 8.

Ejercicio 2.- Hallar a y b para que $f(x) = x^2 + ax + b$ tenga un mínimo en $(3, -1)$.

Ejercicio 3.- Hallar a, b, c y d para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga máximo en $(-2, -4)$ y mínimo en $(-1, -6)$.

Ejercicio 4.- Sea $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[0, +\infty)$ y derivable en $(0, +\infty)$ tal que el gráfico de su derivada $f': (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es



a) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

b) Decidir, justificando la respuesta, si los puntos $x = 0$, $x = 3$, $x = 6$ y $x = 8$ son extremos locales de f .

Ejercicio 5.- Hallar el dominio, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de las funciones

$$a) f(x) = \frac{(4x-3)^2}{3x-4}$$

$$b) f(x) = \frac{3}{x^2-8}$$

Ejercicio 6.- La función de ingreso por las ventas de q unidades de un producto es $R(q) = 6q\sqrt{600 - 2q}$

- Hallar qué cantidad hay que vender para que el ingreso sea máximo.
- Decir para qué valores de q el ingreso es creciente.

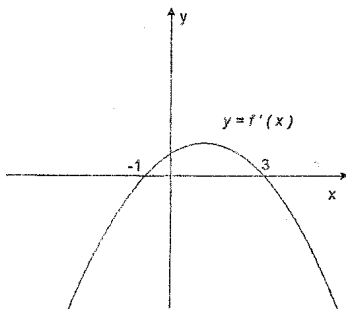
Ejercicio 7.-

- Hallar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = e^{a(x+1)} + 2x + 1$ tenga un extremo relativo en $x_0 = -1$.
- Para el valor hallado de a , decidir si este extremo es un máximo o un mínimo. Justificar.

Ejercicio 8.- La ecuación de demanda correspondiente a cierto producto es $p = D(q) = 465 - 2q$ y la función de costo es $p = C(q) = 0,3q^2 + 5q + 400$, siendo p el precio y q la cantidad de unidades. Determinar el precio para el cual las ganancias por ventas de ese producto son máximas.

Ejercicio 9.- Hallar el dominio, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los extremos relativos, los intervalos de concavidad y de convexidad y los puntos de inflexión de $f(x) = 4xe^{3x-2}$.

Ejercicio 10.- El gráfico dado corresponde a $f'(x)$, la función derivada de $f(x)$.



- Dar los intervalos de crecimiento, de decrecimiento y las abscisas de los extremos relativos de $f(x)$.
- Decir si dichos extremos son máximos o mínimos.

a) El máximo absoluto de $f(x) = x^3 - 3x$ para $x \in [0, 2]$ se alcanza en $x =$

- ☐ 1 ☐ 0 ☐ 2 ☐ -1

b) La función $f(x) = e^{-x^2}$ es cóncava hacia arriba en el intervalo

- ☐ $(0, 1)$ ☐ $(-2, -1)$ ☐ $(-1, 0)$ ☐ $(0, \frac{1}{2})$

c) La ganancia marginal es $G'(x) = (x^2 - 100)e^x$. Entonces la ganancia es decreciente en el intervalo

- ☐ $(0, 10)$ ☐ $(5, 20)$ ☐ $(10, 30)$ ☐ $(7, 40)$

d) La cantidad de raíces de la ecuación $x^5 - 15x^3 + 4 = 0$ es

- ☐ 3 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 0

e) Si $f(x) = xe^{3x}$ entonces $f(x)$ es creciente en

- ☐ $(-\infty, -\frac{1}{3})$ ☐ $(-\infty, -1)$ ☐ $(-\frac{1}{3}, +\infty)$ ☐ $(-1, +\infty)$

f) La función derivada de $f(x)$ es $f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$. Entonces $f(x)$ tiene

- ☐ Un máximo en 1 y un máximo en -1 ☐ Un máximo en 1 y un mínimo en -1
☐ Un mínimo en 1 y un máximo en -1 ☐ Un mínimo en 1 y un mínimo en -1

g) La recta tangente al gráfico de $f(x)$ en $x_0 = 2$ es $y = 3x - 1$, entonces $f(2)$ es

- ☐ 3 ☐ -1 ☐ 5 ☐ Los datos no alcanzan para calcular $f(2)$

PRACTICA 7 REGLA DE L'HÔPITAL

Ejercicio 1.- Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 + x^2 - 2x - 8}$

d) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - x + 1}{x^2 - 5x + 4}$

e) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{5x+2} + 2}{(x+2)^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{x^2}$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x}$

h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{e^{1-x} + x - 2}$

Ejercicio 2.- Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^3}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 2x + 4}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xe^{2x-4} + x^2 - 6}{5x - 10}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x+1)}{\sqrt{5x+4} - 2}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 - 1) + x^2}{x^2 + x + 1}$

Ejercicio 3.- Determinar si la función $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{\ln(4x^2 + 1)}{3x^2}$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

Ejercicio 4.- Calcular $a \in \mathbb{R}$ de modo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 3x^2 - xe^{-3x}}{ax^3} = 3$

Ejercicio 5.- Hallar las asíntotas de $f(x) = \frac{5-x}{\ln(x-4)}$ ($x > 4$)

Ejercicio 6.- Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que f sea continua en $x_0 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(5x^2 + 2x + 1)}{4x} & , \text{ si } x \neq 0 \\ a & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

EJERCICIOS SURTIDOS

Ejercicio 1.- Calcular $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 3x + 3)}{e^{2x-4} - 1}$

Ejercicio 2.- Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^x + x - 4}{\ln(1 + 2x)}$

Ejercicio 3.- Calcular $f'(5)$ si $f(x) = \begin{cases} \frac{3e^{x-5} - x + 2}{x - 5} & , \text{ si } x \neq 5 \\ 2 & , \text{ si } x = 5 \end{cases}$

Ejercicio 4.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \begin{cases} \frac{a(e^{ax} - 1)}{x} & , \text{ si } x \neq 0 \\ a^2 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$

Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que $f'(0) = -4$

Ejercicio 5.- Hallar $a \in \mathbb{R}$ de manera que $f(x) = \begin{cases} \frac{3e^{ax} + 2x - 3}{x} & , \text{ si } x \neq 0 \\ 7 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$ sea continua en $x = 0$.

Ejercicio 6.- Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ que verifican $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^{2a-1} + x^a - 2x^3 - 2}{x^2 - 1} = 13$

Ejercicio 7.- Estudiar las siguientes funciones: Hallar dominio, ecuaciones de las asíntotas, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y hacer un gráfico aproximado

$$f_1(x) = \frac{e^{-x}}{x} \quad f_2(x) = \frac{3x-9}{e^x}$$

Ejercicio 8.- Hallar dominio, ecuaciones de las asíntotas, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, máximos y mínimos relativos y hacer un gráfico aproximado de $h = f \circ g$ donde $f(x) = \ln x$ y $g(x) = x^2 - 1$.

Ejercicio 9.- Marcar la única opción correcta

a) El $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(\sqrt{1+6x})}{x}$ es igual a

☐ 3☐ 6☐ 1☐ $\frac{1}{2}$

b) El $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 5x - 1}{x^2 - 4}$ es igual a

☐ 0☐ $\frac{25}{2}$ ☐ $\frac{5}{2}$ ☐ $\frac{1}{2}$

c) Las ecuaciones de todas las asíntotas de $f(x) = \frac{3x^2 + 9x + 6}{(x-5)(x+1)}$ son

☐ $x = 5 ; x = -1$ ☐ $x = 5 ; x = -1 ; y = 3$ ☐ $x = -1 ; y = 0$ ☐ $x = 5 ; y = 3$

PRACTICA 8 INTEGRALES

Ejercicio 1.-

a) Hallar una función $g(x)$ tal que

i) $g'(x) = 5$

ii) $g'(x) = 4x$

iii) $g'(x) = 2x^2$

iv) $g'(x) = 5 - 4x + 2x^2$

v) $g'(x) = x^n$

vi) $g'(x) = x^3 + x^{\frac{1}{3}}$

vii) $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

viii) $g'(x) = e^x$

ix) $g'(x) = \frac{1}{x}$

b) ¿Es única la respuesta en cada caso?

Ejercicio 2.- Hallar g sabiendo que

a) $g'(x) = 5$ y $g(0) = 1$

b) $g'(x) = 4x$ y $g(-2) = 0$

c) $g'(x) = 5 - 4x + 2x^2$ y $g(1) = -2$

d) $g'(x) = e^x$ y $g(0) = 5$

Ejercicio 3.- Calcular las siguientes integrales indefinidas

a) $\int 8 \, dx$

b) $\int 3x \, dx$

c) $\int 4x + 3 \, dx$

d) $\int 3x^2 + 2x + 1 \, dx$

e) $\int x^4 \, dx$

f) $\int 3x^5 \, dx$

g) $\int 5x^3 - 7x^2 + 3x - 2 \, dx$

h) $\int 3x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{3}} \, dx$

i) $\int \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \, dx$

j) $\int \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \, dx$

k) $\int (x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}})^2 \, dx$

l) $\int \frac{2}{x} - 8x + 3e^x \, dx$

Ejercicio 4.- Aplicar el método de sustitución al cálculo de la siguientes integrales indefinidas

a) $\int (3x + 1)^7 \, dx$

b) $\int \frac{1}{(-2x + 4)^3} \, dx$

c) $\int \frac{1}{5x + 3} \, dx$

Práctica 8

d) $\int \sqrt{4x+2} \, dx$

e) $\int \sqrt[3]{1-x} \, dx$

f) $\int \frac{1}{\sqrt{3x+4}} \, dx$

g) $\int \frac{x}{1+2x^2} \, dx$

h) $\int x(3+x^2)^{\frac{1}{2}} \, dx$

i) $\int (x+1)(x^2+2x+5)^{-\frac{2}{3}} \, dx$

j) $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x} \, dx$

k) $\int \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

l) $\int \frac{e^{\sqrt{3x+1}}}{\sqrt{3x+1}} \, dx$

m) $\int x^2 e^{-x^3+1} \, dx$

n) $\int x^{-1} \ln x \, dx$

o) $\int \frac{\ln^2 x}{x} \, dx$

Ejercicio 5.- Aplicar el método de integración por partes al cálculo de la siguientes integrales indefinidas

a) $\int x(2x+1)^{\frac{1}{2}} \, dx$

b) $\int 3x(2x+1)^{-5} \, dx$

c) $\int 2xe^{3x} \, dx$

d) $\int 2x \ln(3x) \, dx$

e) $\int (x+4)^2 x^{\frac{3}{5}} \, dx$

f) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{5x-1}} \, dx$

g) $\int (x+2) \ln x \, dx$

h) $\int (x^2+1)e^{-x} \, dx$

i) $\int (2x-1)^2 \sqrt{x+1} \, dx$

j) $\int (3x^2-2x) \ln x \, dx$

k) $\int (2x-1) \ln^2 x \, dx$

l) $\int x \ln(x^{-1}) \, dx$

Ejercicio 6.- Aplicar el método de fracciones simples al cálculo de la siguientes integrales indefinidas

a) $\int \frac{1}{x(x-2)} \, dx$

b) $\int \frac{2x-1}{(x+2)(x-1)} \, dx$

c) $\int \frac{3x}{x^2-9} \, dx$

d) $\int \frac{2}{x^2-5x+6} \, dx$

e) $\int \frac{x-4}{x^2+3x-4} \, dx$

f) $\int \frac{x}{x^2+x-2} \, dx$

Ejercicio 7.- Calcular

a) $\int x(x-1)^4 \, dx$

b) $\int \sqrt[3]{2x+1} \, dx$

c) $\int \ln(2x+1) \, dx$

d) $\int \ln \sqrt{x+2} \, dx$

e) $\int \frac{dx}{(3x+2) \ln(3x+2)}$

f) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{(3x-2)^4}} \, dx$

g) $\int \frac{e^x}{(3 + e^{2x})^5} dx$

h) $\int \frac{e^x}{(e^x + 2)(e^x + 3)} dx$

i) $\int \frac{1}{x(\ln x)(1 + \ln x)} dx$

j) $\int \frac{6x}{x^2 + 1} dx$

k) $\int \frac{1 + \sqrt{2x}}{\sqrt{8x}} dx$

l) $\int \frac{9x^2 + 15}{\sqrt{x^3 + 5x + 1}} dx$

Ejercicio 8.- Si la función de ingreso marginal es $R'(q) = 2000 - 20q - 3q^2$

a) Hallar la función de ingreso total $R(q)$.

b) Hallar la función de demanda.

Ejercicio 9.- En la fabricación de un producto los costos fijos por semana son \$4000. La función de costos marginales es $C'(q) = 10^{-5}(0,02q^2 - 25q) + 0,2$, donde $C(q)$ es el costo total de fabricar q kilos de un producto por semana. Calcular el costo de fabricar 10 toneladas en una semana.

Ejercicio 10.- El único fabricante de un producto ha determinado que la función de ingreso marginal es $R'(x) = 100 - 3x^2$. Calcular la función de demanda.

Ejercicio 11.- El costo marginal de producir x unidades de una cierta mercancía es $C'(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$, y el costo de producir dos unidades es de \$2. ¿Cuánto cuesta producir 12 unidades?

Ejercicio 12.- La función de demanda marginal es $D'(x) = \frac{-600x^2}{(2x^3 + 500)^{\frac{3}{2}}}$. Hallar la función de demanda, sabiendo que cuando el precio es de \$50 se demandan 10 toneladas.

Ejercicio 13.- La función de demanda marginal de cierto producto es $D'(x) = \frac{-1}{4\sqrt{1200 - 2x}}$. Calcular la función de ingreso total sabiendo que si se demandan 400 unidades, el ingreso total es \$2800.

Ejercicio 14.- Calcular las siguientes integrales definidas

a) $\int_{-3}^3 -2 dx$

b) $\int_0^1 2x + 1 dx$

c) $\int_{-2}^2 -x^2 + 4 dx$

Práctica 8

d) $\int_{-1}^3 x^3 - 2x^2 - x + 4 \, dx$

e) $\int_0^4 \sqrt{2x+1} \, dx$

f) $\int_1^2 \frac{1}{3x-2} \, dx$

g) $\int_{-3}^0 x\sqrt{1-x} \, dx$

h) $\int_0^2 x\sqrt{6x^2+1} \, dx$

i) $\int_{-1}^1 4e^{2x} + 6e^{-3x} \, dx$

j) $\int_0^{12} \sqrt{4x} \ln x \, dx$

k) $\int_{-3}^2 (-2x+1)e^{-x} \, dx$

l) $\int_1^4 \frac{1}{x^2+x} \, dx$

Ejercicio 15.- La función de costo marginal de un fabricante es $C'(q) = 0,6q + 2$. Si la producción es de $q = 80$ unidades por semana, ¿cuánto costará incrementar la producción a 100 unidades por semana?

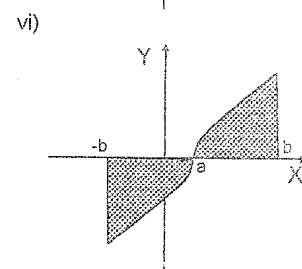
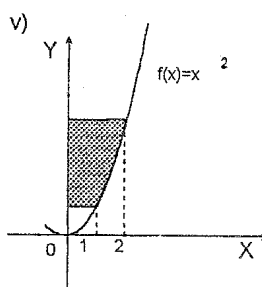
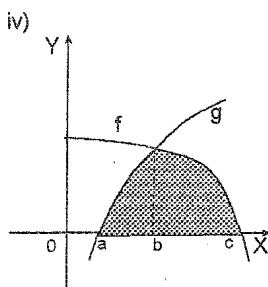
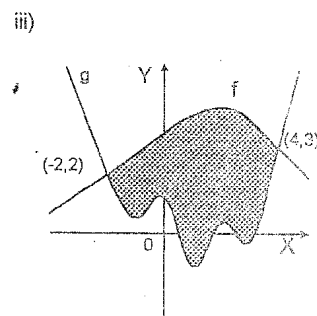
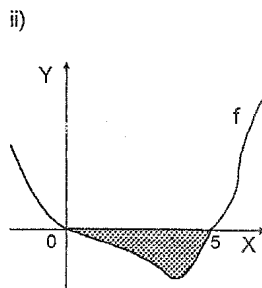
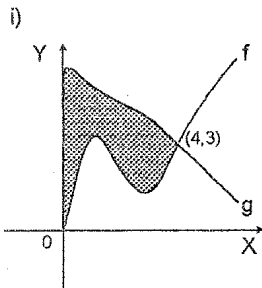
Ejercicio 16.- La función de ingreso marginal de un fabricante es $R'(x) = \frac{1000}{\sqrt{10x}}$. Si R está dado en pesos, obtener el cambio que se produce en los ingresos totales del fabricante si se aumenta la producción de 40 a 90 unidades.

Ejercicio 17.-

a) Sabiendo que $\int_{-2}^4 [f(x) + 2] \, dx = 5$, calcular $\int_{-2}^4 f(x) \, dx$.

b) Sabiendo que $\int_1^3 f(x) \, dx = 4$, calcular $\int_1^3 [5f(x) - 6] \, dx$.

Ejercicio 18.- Establecer mediante integrales el área de las regiones sombreadas



Ejercicio 19.- Calcular el área de la región encerrada por las curvas (sug.: hacer el gráfico)

a) $y = x^2 - 1$; $y = x + 1$

b) $y = 1 - x^2$; $y = x + 1$

c) $y = x^3$; $y = x$

d) $y = \sqrt[3]{x}$; $x = 0$; $y = 1$

e) $y = e^x$; $y = e^{-x}$; $x = 1$; $x = -1$

f) $y = \sqrt{x}$; $y = x - 2$; $x = 0$

g) $y = \sqrt{x}$; $y = x - 2$; $y = 0$

h) $y = x^3 - 4x$, y el eje x

Ejercicio 20.- Hallar el área de la región comprendida entre la curva $y = x^3 - 4x$ y la recta tangente a esta curva en el punto de abscisa $x = -1$

Ejercicio 21.- Decidir sobre la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones

a) El área de la región del plano limitada por el gráfico de $f(x) = x - 2$, la recta $x = 4$ y el eje y es $\int_0^4 (x - 2) dx$.

b) El área de la región del plano limitada por el gráfico de $f(x) = x^2 - 1$ y el eje x para $-1 \leq x \leq 3$ es $-\int_{-1}^1 x^2 - 1 dx + \int_1^3 x^2 - 1 dx$.

c) El área encerrada por las curvas $y = -x^2 + 4$ e $y = -x + 2$ es $\int_{-1}^2 (x^2 - x - 2) dx$.

Aplicaciones: Excedente del consumidor y del productor o fabricante

Definición:

El *excedente del consumidor* es el área comprendida entre la curva de demanda $p = D(q)$ y la recta $p = p_0$ ($p_0 = D(q_0)$ = precio del mercado): $EC = \int_0^{q_0} (D(q) - p_0) dq$

Definición:

El *excedente del productor o fabricante* es el área comprendida entre la curva de oferta $p = O(q)$ y la recta $p = p_0$ ($p_0 = O(q_0)$ = precio del mercado): $EF = \int_0^{q_0} (p_0 - O(q)) dq$

Ejercicio 22.- La función de demanda para un producto es $p = D(q) = 100 - 0,05q$, p es el precio por unidad para una demanda de q unidades. La función de oferta es $p = O(q) = 10 + 0,1q$. Determinar

a) El punto de equilibrio.

b) El excedente de los consumidores cuando el mercado está en equilibrio.

c) El excedente de los fabricantes cuando el mercado está en equilibrio.

Ejercicio 23.- La función de demanda para un producto es $p = D(x) = \frac{12}{x+1}$. La función de oferta es $p = O(x) = x + 2$. Calcular el excedente del consumidor y del productor cuando el mercado está en equilibrio.

EJERCICIOS SURTIDOS

Ejercicio 1.- Calcular $\int (2x + 3) \ln(x^2 + 3x + 1) dx$

Ejercicio 2.- Calcular el excedente del consumidor sabiendo que la función de demanda es $p = D(q) = 4500(q + 1)^{-\frac{2}{3}} + 1200$ (q indica cantidad de unidades, y p su precio unitario) y que el precio de mercado es \$1700.

Ejercicio 3.- Calcular el área de la región encerrada por la gráfica de $y = \frac{4}{x-1}$ y la recta $y = \frac{-x+7}{2}$.

Ejercicio 4.- La demanda marginal de cierto producto es $D'(q) = \frac{-q}{\sqrt{10000 - q^2}}$. Hallar la función de demanda sabiendo que cuando se demandan 60 unidades, el precio unitario es \$150.

Ejercicio 5.- Hallar la función de costo sabiendo que el costo marginal es $C'(q) = \frac{8q}{\sqrt{q^2 + 9}}$ y que cuando se producen 4 unidades, el costo unitario es \$45.

Ejercicio 6.- Calcular

a) $\int \frac{dx}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)}$

b) $\int \frac{3x}{\sqrt{2x^2 + 49}} dx$

Ejercicio 7.- Hallar el área de la región encerrada por los gráficos de las funciones $y = x^3$ e $y = 16x$.

Ejercicio 8.- Sea R la región encerrada por los gráficos de $y = \sqrt{2x+1}$; $y = 0$; $x = 24$. Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que la recta $x = a$ divida a R en dos regiones de igual área.

Ejercicio 9.- Calcular

a) $\int \frac{\ln x \, dx}{x(1 + \ln x)(2 + \ln x)}$

b) $\int \frac{e^x(e^x - 1)}{e^{2x} + e^x - 6} \, dx$

Ejercicio 10.- El costo marginal de producir x unidades de cierta mercancía es $C'(x) = \frac{1}{\sqrt{5x+4}}$, y el costo de producir una unidad es de \$0,40. Encontrar la función de costo, y lo que cuesta producir 9 unidades.

Ejercicio 11.- Hallar el excedente del consumidor de un artículo cuya función de demanda es $p(q) = \frac{15q+45}{q^2+6q+5}$, donde q indica miles de unidades, sabiendo que en el mercado mil unidades cuestan \$5.

Ejercicio 12.- La función de demanda marginal de un producto es $D(q) = \frac{160}{\sqrt{8q+36}}$. Hallar el excedente de los consumidores sabiendo que el precio de equilibrio es \$16.

Ejercicio 13.- Calcular

a) $\int \frac{x-1}{(x+2)(x-4)} \, dx$

b) $\int \frac{x^3 dx}{(x^2+2)(x^2+1)}$

Ejercicio 14.- Marcar la única opción correcta

a) Si en la integral $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$ se hace la sustitución $u = \sqrt{x}$, se obtiene

☐ $\int e^u \, du$ ☐ $\int \frac{e^u}{u} \, du$ ☐ $\frac{1}{2} \int \frac{e^u}{u} \, du$ ☐ $2 \int u e^u \, du$

b) La función de ingreso marginal de un fabricante es $R'(q) = \frac{30000}{q^2}$, entonces el cambio que se produce en los ingresos totales cuando aumenta la producción de 100 a 500 unidades es

☐ 240 ☐ 80 ☐ aproximadamente 96566 ☐ 400

Práctica 8

c) El área encerrada por las curvas $y = x^2 - 9$ e $y = -x^2 + 9$ es

☐ $\int_{-3}^0 x^2 - 9 \, dx + \int_0^3 -x^2 + 9 \, dx$ ☐ $\int_{-3}^3 -x^2 + 9 \, dx - \int_{-3}^3 x^2 - 9 \, dx$

☐ $\int_{-3}^0 x^2 - 9 \, dx - \int_0^3 -x^2 + 9 \, dx$ ☐ $\int_{-3}^3 x^2 - 9 \, dx + \int_{-3}^3 x^2 - 9 \, dx$

d) Si $\int_0^3 2f(x) + 5 \, dx = 10$, entonces $\int_0^3 f(x) \, dx$ es igual a

☐ 0 ☐ -10 ☐ $\frac{5}{2}$ ☐ $-\frac{5}{2}$

e) Si la región encerrada por las rectas $y = 2x + 7$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 5$ queda dividida por la recta $x = a$ en dos regiones de igual área, entonces a vale

☐ 3 ☐ 2,5 ☐ 3,5 ☐ -10

f) El ingreso marginal por las ventas de determinado producto está dado por

$R'(q) = \frac{2q+3}{q^2+3q+e^2}$. Si se sabe que el ingreso total es nulo cuando no hay ventas, entonces el ingreso total $R(q)$ es igual a

☐ $\ln(2q+3)$ ☐ $\ln(2q+3) - \ln 3$ ☐ $\ln(q^2+3q+e^2)$ ☐ $\ln(q^2+3q+e^2) - 2$

g) La función de demanda de un producto es $p = D(q) = 125 - 5\sqrt{q}$ (q indica la cantidad de unidades) y el punto de equilibrio es (49 unidades, \$90). Entonces el excedente del consumidor es igual a

☐ $\int_0^{49} 125 - 5\sqrt{q} \, dq$ ☐ $\int_0^{90} 76 - 5\sqrt{q} \, dq$

☐ $\int_0^{49} 5\sqrt{q} - 35 \, dq$ ☐ $\int_0^{49} 35 - 5\sqrt{q} \, dq$

h) El área de la región encerrada por las curvas $y = 2\sqrt{x}$; $y = 6$; $x = 0$ es

☐ $\int_0^9 6 - 2\sqrt{x} \, dx$ ☐ $\int_0^6 2\sqrt{x} \, dx$

☐ $\int_0^3 6 - 2\sqrt{x} \, dx$ ☐ $\int_0^9 2\sqrt{x} \, dx$

PRACTICA 9 SUCESIONES

Ejercicio 1.- Para las siguientes sucesiones, escribir el término 35

a) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, ...

b) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, ...

c) $\sqrt{2}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{8}$, ...

d) 1 , 0 , -1 , 1 , 0 , -1 , ...

e) 1 , 5 , 9 , 13 , 17 , ...

f) 2 , $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{27}$, $\frac{2}{81}$, ...

Ejercicio 2.- Escribir los cinco primeros términos de

a) $a_n = \frac{n^2 - 3}{2n + 1}$

b) $a_n = \frac{n^n}{n!}$

c) $a_n = 1$; $a_{n+1} = a_n + 4$, $n \geq 1$

d) $a_1 = 2$; $a_{n+1} = \frac{a_n}{3}$, $n \geq 1$

Ejercicio 3.- Escribir el término general o término enésimo de las sucesiones

a) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, ...

b) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, ...

c) $\sqrt{2}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{8}$, ...

d) $a_n = 1$; $a_{n+1} = a_n + 4$, $n \geq 1$

$$e) a_1 = 2 ; a_{n+1} = \frac{a_n}{3}, n \geq 1$$

Progresiones aritméticas

Una sucesión $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ se llama *progresión aritmética* si cada término se obtiene sumándole al anterior una misma cantidad fija d llamada *diferencia*. Es decir

$$a_2 = a_1 + d, \quad a_3 = a_2 + d, \quad \dots, \quad a_{n+1} = a_n + d, \quad \dots$$

El término general de una progresión aritmética es $a_n = a_1 + (n - 1)d$

Ejercicio 4.- Decidir cuáles de las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas

a) $3, 7, 11, 15, 19, \dots$

b) $-25, -20, -15, -10, -5, \dots$

c) $\frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}, \frac{8}{4}, \dots$

d) $\frac{4}{4}, \frac{4}{5}, \frac{4}{6}, \frac{4}{7}, \frac{4}{8}, \dots$

e) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + nd$

Ejercicio 5.- El alquiler de una casa de veraneo cuesta: \$120 el primer día, y \$75 los restantes días.

a) ¿Cuál es el precio de n días de alquiler?

b) Si se pagaron \$1 845, ¿de cuántos días fue el alquiler?

Ejercicio 6.- En un contrato, la penalización por demora en el cumplimiento del mismo por alguna de las partes va en progresión aritmética, de \$100 si la demora es de un día, a \$800 si la demora es de 15 días. ¿Cuál es la penalización por 2 días de demora?

Progresiones geométricas

Una sucesión $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ se llama *progresión geométrica* si cada término se obtiene

multiplicando el anterior por un número fijo r llamado *razón*. Es decir:

$$a_2 = a_1 r, \quad a_3 = a_2 r, \quad \dots, \quad a_{n+1} = a_n r, \quad \dots$$

El término general de una progresión geométrica es $a_n = a_1 r^{n-1}$

Ejercicio 7.- Decidir cuáles de las siguientes sucesiones son progresiones geométricas

- a) 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , ...
- b) 2000 , 200 , 20 , 2 , 0,2 , ...
- c) 3 , 6 , 12 , 24 , 42 , ...
- d) $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{5}{27}$, $\frac{5}{81}$, $\frac{5}{243}$, ...
- e) $\frac{5}{3}$, $-\frac{5}{9}$, $\frac{5}{27}$, $-\frac{5}{81}$, $\frac{5}{243}$, ...
- f) 1 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ...
- g) 3 , 6 , 9 , 12 , 15 , ...
- h) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2^n a_n$

Ejercicio 8.- En una progresión geométrica $a_1 = 5$, $a_4 = 135$. Calcular el término general a_n .

Ejercicio 9.- Se toma una hoja de papel de 30 cm de alto por 20 cm de ancho y 0,1 mm de espesor.

- a) Calcular el área de la hoja.
- b) Se dobla la hoja por la mitad, ¿Cuál es el área y el espesor?
- c) Se vuelve a doblar... Si se pudiera doblar 50 veces (hacer la prueba de doblarla más de 8 veces), ¿con cuál de las siguientes dimensiones sería comparable el espesor obtenido?
 - ◇ Grosor de una guía telefónica (10 cm)
 - ◇ Altura de una habitación (3 m)
 - ◇ Altura del monte Everest (8 880 m)

Práctica 9

- ◊ Distancia de la Tierra a la Luna (350 mil km)
- ◊ Distancia de la Tierra al Sol (14,4 millones de km)

d) Luego de haber contestado, hallar las sucesiones que dan el área y el espesor en cada doblez. Estimar el área y el espesor obtenidos con 50 dobleces.

Ejercicio 10.- La población mundial es de unos 6 500 millones de habitantes. Se estima que crece a un ritmo del 2% anual.

- a) Escribir la población estimada para los próximos 5 años.
- b) Comprobar que se obtiene una progresión geométrica. ¿De qué razón?
- c) ¿Cuántos años tardará en duplicarse si se mantiene el mismo ritmo de crecimiento?

Ejercicio 11.- El Banco BXT ofrece el 1% de interés mensual para depósitos de plazo fijo a 30 días. Si se depositan \$3 500 y llamamos M_n al monto al cabo de n meses,

- a) Calcular
 - i) M_1
 - ii) M_5
 - iii) M_n
- b) Comprobar que M_n es una progresión geométrica.
- c) Calcular su razón.
- d) ¿Cuántos meses hay que esperar para obtener un monto mayor a \$10 000?

Ejercicio 12.- ¿Cuál es la tasa de interés mensual de un capital de \$5 000, capitalizado mensualmente a interés compuesto, si al cabo de 6 meses se obtiene un monto de \$6 700?

Ejercicio 13.- Calcular los siguientes límites

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2n + 1}{6n^2 + 5n - 4}$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 2}{n^2 + 1}$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^2 + 3}{n^2 - 2n - 1}$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3} + 4}{n^2 - 2}$
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 - 3} - 1}{\sqrt[3]{n^3 + 7} + 2}$
- f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - 3)(\sqrt{n^2 + 4} - n)$
- g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 4}$
- h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3n + 1}{2n - 1}}$
- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{4}\right)^{n-2}$

k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}$

l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{2n+1}\right)^n$

m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n}{e^n}$

n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-2}{2n+1}\right)^{n-1}$

o) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right)^{n^2+n}$

EJERCICIOS SURTIDOS

Ejercicio 1.- De una progresión geométrica a_n se sabe que $a_3 = 80$ y que $a_6 = -10$. ¿Cuánto valen a_8 y a_2 ?

Ejercicio 2.- Algunos términos de una sucesión son $a_3 = -\frac{3}{8}$, $a_5 = -\frac{27}{32}$, $a_8 = \frac{729}{256}$.

a) ¿Puede tratarse de una progresión geométrica?

b) ¿Y de una progresión aritmética?

Ejercicio 3.- Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2n} + \ln n}{n^2 + n + 1}$

Ejercicio 4.- La sucesión a_n está en progresión geométrica. Calcular a_{10} si se sabe que $a_4 = 18$ y $a_7 = \frac{9}{4}$. Justificar.

Ejercicio 5.- Marcar la única opción correcta.

a) El $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$ es igual a

☐ 0 ☐ 1 ☐ $+\infty$ ☐ $\frac{1}{2}$

b) En una progresión geométrica $a_4 = 2$, $a_6 = 4$ y $r > 0$. Entonces r es igual a

☐ 4 ☐ 6 ☐ 2 ☐ $\sqrt{2}$

c) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n-1}\right)^{3n-2} = e^{12}$ entonces a es igual a

☐ 4 ☐ 3 ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ -4

PRACTICA 10 SERIES

Ejercicio 1.- Hallar el término general de cada una de las siguientes series

a) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots$

b) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$

c) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$

d) $1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{7}\right)^2 + \dots$

e) $\frac{3}{5} + \frac{4}{10} + \frac{5}{15} + \dots$

f) $-2 + \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \dots$

g) $9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots$

h) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \dots$

i) $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

j) $2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} + \dots$

Ejercicio 2.- Le ofrecen el siguiente trato: Durante treinta días consecutivos recibirá *cien mil* pesos por día, con la condición de que en el mismo período tendrá que ir pagando un *centavo* el primer día, *dos* el segundo, *cuatro* el tercero, *ocho* el cuarto y así sucesivamente. ¿Acepta el trato?

Ejercicio 3.- Analizar la convergencia y calcular la suma de las siguientes series

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{6^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{3^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{3^{n+1}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+2}}{5^{n-1}}$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+2}}{3^n}$

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+2}}{3^{2n}}$

h) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^{n+2}}{3^{2n}}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^{n-1}} + \frac{2}{5^{n+1}} \right)$

j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1} + 3^{2n+1}}{4^{2n}}$

k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} + 2^{2n-1}}{4^n}$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} - 3^{3n+1}}{4^{3n+1}}$

Ejercicio 4.- Analizar la convergencia de las siguientes series

a) Utilizando el criterio de comparación o la condición necesaria de convergencia

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{1+3^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+3^n}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{3^n-2^n}$

b) Aplicando el criterio de D'Alembert

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+2}{3^n}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2n+1}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n+1)^3}{5^n}$

c) Aplicando el criterio de la raíz

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n+1)^3}{5^n}$

Ejercicio 5.- Estudiar la convergencia de las siguientes series

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+2}{n^3+n^2-2n+1}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+n+1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n3^{n-1}}$

d) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(n+1)(n+4)}{n!}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\ln(n+1)]^n}{n^n}$

Ejercicio 6.- Analizar la convergencia de las siguientes series alternadas

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3-1}{n^3+1}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3n}{n^2+1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+2} \frac{n-1}{n^3}$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{6^n}$

Ejercicio 7.- Hallar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias

a) $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} n(x-2)^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}(x-1)^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n^3 3^{n-1}}$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x+2)^n$

EJERCICIOS SURTIDOS

Ejercicio 1.- Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{n+1}}{5^n}$ y si es posible hallar su suma.

Ejercicio 2.- Determinar si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+3}}{5^{n-3}}$ es convergente y, en caso afirmativo, calcular su suma.

Ejercicio 3.- Hallar todos los $x \in \mathbb{R}$ para los que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4^n}(x-2)^n$ es convergente.

Ejercicio 4.- Analizar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{7^n n!}$

Ejercicio 5.- Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{4n+3} \right)^n x^n$ para los distintos valores de x .

Ejercicio 6.- Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{5^{n-1}}$ y, si es posible, calcular su suma.

Ejercicio 7.- Analizar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^4}{5^n}$

Ejercicio 8.- Analizar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{4n}$

Ejercicio 9.- Marcar la única opción correcta

a) El radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ es $\rho = 5$. Si $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^n$ y $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-6)^n$, entonces se puede afirmar que

- ☐ S_1 converge y S_2 diverge ☐ S_1 diverge y S_2 diverge
- ☐ S_1 converge y S_2 converge ☐ S_1 diverge y S_2 converge

b) Dadas las series $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ y $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ entonces se verifica que

- ☐ Ambas divergen ☐ S_1 diverge y S_2 converge
- ☐ S_1 converge y S_2 diverge ☐ Ambas convergen

c) Si $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de términos positivos y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, entonces

- ☐ S converge si $L > 1$ ☐ S diverge si $0 \leq L < 1$
- ☐ S converge si $0 \leq L < 1$ ☐ S converge si $L = +\infty$

d) La suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^{n+1}}$ es igual a

- ☐ 1 ☐ $\frac{3}{4}$ ☐ 4 ☐ $+\infty$

e) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene todos los $a_n > 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, entonces

- ☐ Si $L > 1$ la serie converge ☐ Si $0 \leq L < 1$ la serie diverge
- ☐ Si $0 \leq L < 1$ la serie converge ☐ Si $L = 0$ la serie diverge